Centre d'Estudis Edukat

Reforç escolar i Tècniques d'estudi

Primària – ESO – Batxillerat – Proves d'accés – FPro

Índex ESO 2

1 Potencias y raíces de números enteros

Objetivos

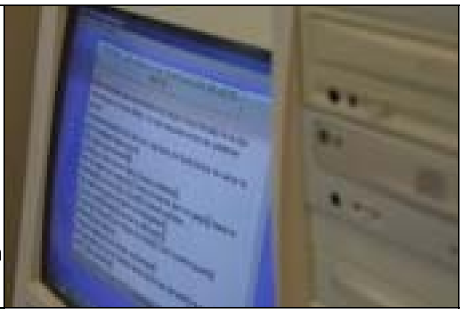
En esta quincena aprenderás a:

- Expresar multiplicaciones de un mismo número en forma de potencia.
- Realizar operaciones con potencias.
- Trabajar con potencias de base 10.
- Expresar números en notación científica.
- Calcular raíces cuadradas.
- Realizar cálculos con la ayuda de una calculadora.

Antes de empezar

Seguro que más de una vez habrás hablado de megas o de gigas al referirte a un ordenador. Pero, ¿a qué nos referimos cuando nombramos estas unidades.

La unidad más pequeña para representar la información guardada en un ordenador es el bit. Un bit (de binary digit, dígito binario) equivale a escribir un 0 o un 1 en un ordenador.



Para representar más información se usan grupos de bits. Por ejemplo 11001110 es un Byte.

A partir de aquí, las unidades se calculan usando potencias de 2

1 Kilobyte equivale a 1024 Bytes

1 KB = 2^{10} Bytes

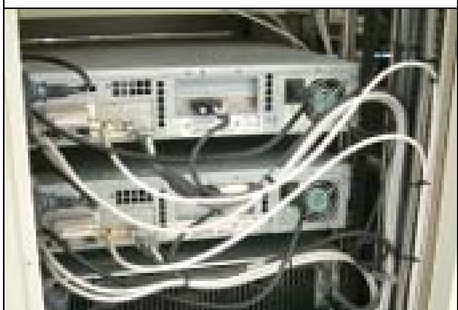
Después del Kilobyte se utilizan dos medidas que seguro te sonarán más:

El Megabyte, que equivale a 1024 KB

1 MB = 2^{10} KB

El Gigabyte, que equivale a 1024 MB

1 GB = 2^{10} MB



¿Y qué tenemos después del Giga?

El Terabyte, 1 TB = 2^{10} GB

El Petabyte, 1 PB = 2^{10} TB

El Exabyte, 1 EB = 2^{10} PB

El Zettabyte, 1 ZB = 2^{10} EB

El Yottabyte, 1 YB = 2^{10} ZB

Para que te hagas una idea de las enormes unidades de almacenamiento de información que estamos manejando, veamos un ejemplo:

¿Cuántos MB equivalen a 1 YB?

1 YB = 2^{10} ZB = 2^{20} EB = 2^{30} PB =
= 2^{40} TB = 2^{50} GB = 2^{60} MB =
= 1152921504606846976 MB

Una potencia de base un entero y exponente un natural es una multiplicación repetida. Quizá te convenga repasar las operaciones combinadas y la jerarquía de operaciones.

1. Potencias de un número entero

¿Qué es una potencia?

Una potencia cuya base es un número entero y cuyo exponente es un número natural, es un **producto de factores iguales**.

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$
el producto se hace n veces

La base, **a**, es el factor que se repite. El exponente, **n**, indica el número de veces que se repite la base.

Ejemplos:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

$0^2 = 0 \cdot 0$

$4^0 = 1$ (este es un caso especial, ya que no podemos multiplicar un número por sí mismo 0 veces)

Signo de una potencia

Al calcular potencias de base un número entero, presta atención al **signo de la base** y al **exponente**.

También debes distinguir a qué número exactamente está **afectando la potencia**.

No es lo mismo -3^4 que $(-3)^4$

En general cualquier potencia de un **número positivo** será **positiva**. Y el **opuesto** de **esa potencia** será siempre **negativo**.

Si la **base es negativa** y el exponente **par o cero**, el valor de la potencia será **positivo**.

Pero si la **base es negativa** y el exponente es **impar**, el valor de la potencia será **negativo**.

Ejemplos:

$3^4 = 81$

$3^3 = 27$

$(-2)^8 = 256$

$(-2)^9 = -512$

$2^8 = 256$

$-2^8 = -256$ (se trata del opuesto de la potencia anterior)

$5^0 = 1$

$-5^0 = -1$ (de nuevo el opuesto)

EJERCICIOS resueltos

1. Calcula el valor de las potencias siguientes: 4^2, -4^2, $(-4)^2$ y -4^0

   $4^2 = 16$

   $-4^2 = -16$

   $(-4)^2 = 16$

   $-4^0 = -1$

2. Calcula el valor de las potencias: -3^5, $(-3)^5$, $(-3)^0$ y -3^0

   $-3^5 = -243$

   $(-3)^5 = -243$

   $(-3)^0 = 1$

   $-3^0 = -1$

3. ¿Es lo mismo calcular a^b que b^a?

   En general no es lo mismo.

   Esto ¿qué quiere decir? Pues que normalmente las dos potencias no darán el mismo resultado, pero puede ocurrir que en algún caso sí coincidan.

   Por ejemplo $2^3 = 8$, que no coincide con $3^2 = 9$. Esto es lo que es normal.

   Ahora bien, fíjate en 2^4 y 4^2. Ambas potencias valen 16.

   ¿Eres capaz de encontrar algún otro ejemplo en el que coincidan?

2. Operaciones con potencias

Potencia de productos y cocientes

Para hacer el **producto de dos números elevado a una misma potencia** tienes dos caminos posibles, cuyo resultado es el mismo:

Puedes primero multiplicar los dos números, y después calcular el resultado de la potencia:

$$(4\cdot5)^4 = 20^4 = 160000$$

O bien puedes elevar cada número por separado al exponente y después multiplicar los resultados.

$$(4\cdot5)^4 = 4^4\cdot5^4 = 256\cdot625 = 160000$$

De forma análoga puedes proceder si se trata del **cociente de dos números elevado a la misma potencia.**

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = 1{,}5^4 = 5{,}0625$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16} = 5{,}0625$$

$$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n \text{ y } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

$(2\cdot3)^3 = 6^3 = 216$

$(2\cdot3)^3 = 2^3\cdot3^3 = 8\cdot27 = 216$

$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$

$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = \frac{6^2}{2^2} = \frac{36}{4} = 9$

Observa que de las dos formas obtienes el mismo resultado. Ahora bien, no siempre será igual de sencillo de las dos formas.

Así que piensa de antemano qué método va a ser más conveniente para realizar el cálculo.

Producto de potencias de igual base

Observa el siguiente ejemplo:

$$2^3\cdot2^4 = (2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2\cdot2) = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^7$$

Es decir, el resultado de **multiplicar potencias de igual base** es una potencia con la **misma base**, y cuyo exponente es la **suma de los exponentes** de las potencias iniciales.

$$a^n\cdot a^m = a^{n+m}$$

Ejemplos:

$5^4\cdot5^7 = 5^{4+7} = 5^{11}$

$(-2)^5\cdot(-2)^6 = (-2)^{5+6} = (-2)^{11}$

$x^2\cdot x^8 = x^{2+8} = x^{10}$

Cociente de potencias de igual base

Veamos cómo se haría un cociente de potencias de igual base:

$$\frac{5^7}{5^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{1} = 5^4$$

Observa que el resultado de **dividir dos potencias de igual base** es otra potencia con la **misma base**, y en donde el **exponente** es la **resta de los exponentes** iniciales.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Ejemplos:

$$\frac{6^9}{6^2} = 6^{9-2} = 6^7$$

$$\frac{(-5)^{13}}{(-5)^4} = (-5)^{13-4} = (-5)^9$$

$$\frac{7^4}{7^4} = 7^{4-4} = 7^0 = 1$$

$$\frac{x^{23}}{x^{20}} = x^{23-20} = x^3$$

Potencia de una potencia

Una potencia cuyo exponente es un número natural equivale a la multiplicación repetida de la base tantas veces como indica el exponente. ¿Qué es entonces la potencia de una potencia?

Observa el siguiente ejemplo:

$$(2^4)^3 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = 2^{4+4+4} = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

Es decir, el resultado de calcular la **potencia de una potencia** es una potencia con la **misma base**, y cuyo exponente es la el **producto de los dos exponentes**.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ejemplos:

$$(3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$$

$$\left[(-5)^3\right]^6 = (-5)^{3 \cdot 6} = (-5)^{18}$$

$$(y^4)^8 = y^{4 \cdot 8} = y^{32}$$

EJERCICIOS resueltos

4. Calcula el valor de los siguientes productos y cocientes:

a) $(2\cdot 5)^3$ b) $(10\cdot 3)^4$ c) $\left(\frac{6}{3}\right)^5$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^2$

a) Nos interesa multiplicar primero: $(2\cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$

b) Calculamos cada potencia por separado:
$(10\cdot 3)^4 = 10^4\cdot 3^4 = 10000\cdot 81 = 810000$

c) Primero dividimos: $\left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5 = 32$

d) Calculamos las potencias y después dividimos: $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = 6{,}25$ (También puedes dejar el resultado expresado en forma de fracción.)

5. Expresa en forma de potencia el resultado:

a) $5^3\cdot(5^2)^3$ b) $2^4\cdot\frac{2^7}{2^2}$ c) $\left(\frac{2^9}{4}\right)^5$

a) $5^3\cdot(5^2)^3 = 5^3\cdot 5^6 = 5^9$

b) $2^4\cdot\frac{2^7}{2^2} = 2^4\cdot 2^5 = 2^9$

c) $\left(\frac{2^9}{4}\right)^5 = \left(\frac{2^9}{2^2}\right)^5 = (2^7)^5 = 2^{35}$

6. ¿Tiene sentido la potencia 2^{3^4} ? ¿Cómo debemos calcularla?

El problema al calcular la potencia es saber en qué orden debemos elevar. Por ello necesitamos paréntesis que nos aclaren este orden.

Podemos interpretarla como $(2^3)^4 = 2^{12}$

Pero también como $2^{(3^4)} = 2^{81}$, que no coincide con el resultado anterior.

3. Potencias de base 10.Notación científica

Potencias de base 10

Es muy sencillo calcular potencias cuya base es diez.

$10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$…

La forma en que escribimos los números utiliza potencias de base 10. Por ello se denomina **numeración decimal**.

Cualquier número puede escribirse como una suma de naturales que multiplican a potencias de base 10, es lo que se conoce como **descomposición polinómica de un número**:

$$975 = 9\cdot10^2 + 7\cdot10^1 + 5\cdot10^0$$

Ejemplo:

$5276=5\cdot10^3+2\cdot10^2+7\cdot10^1+6\cdot10^0$

El número tiene:

5 unidades de millar
2 centenas
7 decenas
6 unidades

Notación Científica

Para facilitar la lectura de cantidades muy grandes o muy pequeñas que aparecen con frecuencia en el trabajo científico se utiliza la **notación científica**.

Un número en notación científica consta de un número decimal, llamado **mantisa**, multiplicado por una **potencia de diez**.

La mantisa tendrá una única cifra delante de la coma decimal. Esta cifra no puede ser cero.

Por ejemplo, la masa de la tierra es:

$$m_{tierra} = 5974000000000000000000000 \text{ kg}$$

En notación científica será $5{,}974 \cdot 10^{24}$. Observa que si realizas la multiplicación se obtiene el resultado de arriba.

Otro ejemplo, la masa del electrón:

$$m_{elec}=0{,}000000000000000000000000000911 \text{ g}$$

En notación científica es $9{,}11 \cdot 10^{-28}$.

Notación científica: $a{,}bcd\ldots \cdot 10^n$, siendo $a\neq0$

Ejemplos:

$243000 = 2{,}43 \cdot 10^5$

$5764000000000 = 5{,}764 \cdot 10^{12}$

$90000 = 9 \cdot 10^4$

$0{,}00000045 = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$

$0{,}000003002 = 3{,}002 \cdot 10^{-6}$

$0{,}007 = 7 \cdot 10^{-3}$

EJERCICIOS resueltos

7. Obtén la descomposición polinómica de 18067.

$18067 = 1 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

8. Halla la descomposición polinómica de un número que tiene 4 decenas, 5 unidades, 8 centenas y 7 unidades de millar.

Lo primero será ordenar convenientemente los datos

7 unidades de millar, 8 centenas, 4 decenas y 5 unidades, es decir:

$7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

9. Expresa 4560000000 en notación científica.

$4560000000 = 4{,}56 \cdot 10^9$

10. Expresa 0,000000000000243 en notación científica.

$0{,}000000000000243 = 2{,}43 \cdot 10^{-13}$

11. ¿Qué número decimal se corresponde con $5{,}27 \cdot 10^8$?

$5{,}27 \cdot 10^8 = 527000000$

12. ¿ Qué número decimal se corresponde con $1{,}327 \cdot 10^{-9}$?

$1{,}327 \cdot 10^{-9} = 0{,}000000001327$

13. El número $345{,}9 \cdot 10^{-12}$ no está escrito correctamente en notación científica. Escríbelo de forma correcta.

Lo que debes hacer es pasar 3,459 a notación científica, y después multiplicar por 10^{-12}

$345{,}9 \cdot 10^{-12} = 3{,}459 \cdot 10^1 \cdot 10^{-12} = 3{,}459 \cdot 10^{1-12} = 3{,}459 \cdot 10^{-11}$

4. Cuadrados perfectos. Raíces cuadradas

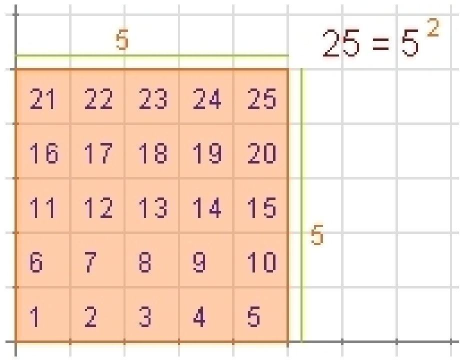
Cuadrados perfectos

Un **cuadrado perfecto** es un número que es cuadrado de algún número entero. Como es lógico, la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es siempre un número entero.

Por ejemplo cuadrados perfectos son:

0 porque $0 = 0^2$, 4 porque $4 = 2^2$, 9 porque $9 = 3^2$...

Para resolver una actividad de proporcionalidad compuesta se hace de forma ordenada con el procedimiento de reducción a la unidad.

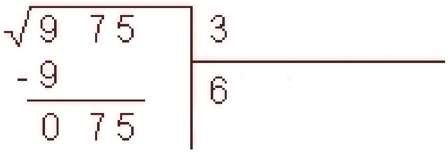


Un cuadrado perfecto es el área de un cuadrado.

Raíces cuadradas

Veamos un ejemplo. Al escribir el número haz grupos de dos cifras, de derecha a izquierda: **75** y **9**.

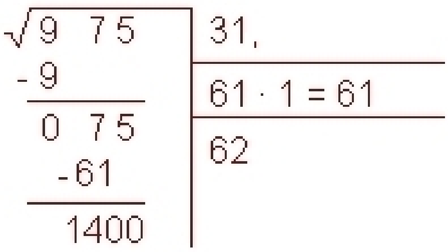
Cálculo de la raíz:



Busca el número cuyo cuadrado más se acerca a **9**. Es **3**.

$\mathbf{3^2 = 9}$, lo restamos de **9** y bajamos las dos cifras siguientes.

Bajo el 3 escribimos su doble, **6**

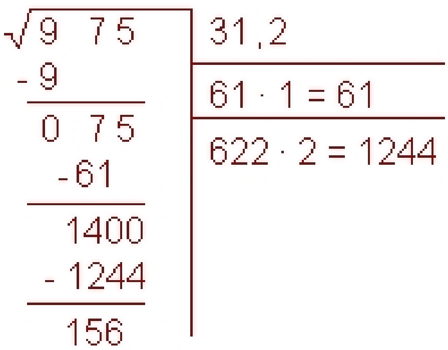


Busca el número **6x**, tal que **6x·x** sea el más cercano a **75** sin pasarse.

62·2=124 se pasa, 61·1=61 sí sirve.

Restamos 75-61 = 14. Ponemos **dos ceros** y una **coma en el radicando**.

Abajo escribimos el doble de 31, **62**



Busca **62x** tal que **62x·x** sea el más cercano a **1400** sin pasarse.

622·2 = 1244 es el más cercano.

Por tanto $\sqrt{975} \approx 31{,}2$

Para hallar más decimales, escribe dos ceros tras el 156 y repite el proceso.

EJERCICIOS resueltos

12. Indica si los números 123, 169 y 258 son cuadrados perfectos.

123 no lo es, puesto que $11^2 = 121$, $12^2 = 144$

$169 = 13^2$ es un cuadrado perfecto. (Es el área de un cuadrado de 13 unidades de lado.)

258 no lo es, ya que $16^2 = 256$ y $17^2 = 289$

13. Con un decimal, calcula la raíz cuadrada de 83.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{83} & 9{,}1 \\ \cline{2-2} -81 & 181 \cdot 1 = 181 \\ \cline{1-1} 200 & \\ -181 & \\ \cline{1-1} 19 & \end{array}$$

9 es el número cuyo cuadrado más se acerca a 83 sin pasarse.

$9 \cdot 9 = 81$

Añade dos ceros para continuar con decimales.

$2 \cdot 9 = 18$

Busca el número **18x** de forma que **18x ·x** sea el más cercano a **200** sin pasarse.

El número es **181** puesto que **181 · 1 = 181**

$$\sqrt{83} = 9{,}1$$

para seguir se repite el proceso

14. Calcula la raíz cuadrada de 798, con una cifra decimal.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7\ 98} & 28{,}2 \\ \cline{2-2} -4 & 48 \cdot 8 = 384 \\ \cline{1-2} 3\ 98 & 562 \cdot 2 = 1124 \\ -384 & \\ \cline{1-1} 1400 & \\ -1124 & \\ \cline{1-1} 276 & \end{array}$$

De derecha a izquierda, haz grupos de dos cifras: **98** y **7**.

2 es el número cuyo cuadrado más se acerca a **7** sin pasarse.

$2 \cdot 2 = 4$

Baja las dos cifras siguientes.

$2 \cdot 2 = 4$

Busca el número **4x** tal que **4x ·x** sea el más cercano a **398** sin pasarse.

x es **8** porque **48 · 8 = 384**

$2 \cdot 28 = 56$

Pon la coma y dos ceros.

Busca **56x** con **56x ·x** el más cercano a **1400** sin pasarse.

x es **2** pues **562 · 2 = 1124**.

$$\sqrt{798} = 28{,}2$$

Para practicar

1. Escribe en forma de potencia:

a) 7·7·7·7·7

b) (-5)·(-5)·(-5)·(-5)·(-5)·(-5)

c) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$

d) $\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}$

2. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) -2^2 b) $(-2)^2$

c) -2^0 d) $(-2)^0$

3. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) -3^3 b) $(-3)^3$

c) -3^2 d) $(-3)^2$

4. Ordena de menor a mayor, utilizando para ello el símbolo <.

$(-3)^2$, $(-3)^3$, -3^2 , 3^3 , $(-3)^0$

5. Ordena de mayor a menor, utilizando los símbolos > e = cuando según los necesites.

$(-2)^3$, 2^3, -2^3 , 2^0 , -2^2 , $(-2)^0$, -2^0

6. ¿Son iguales las siguientes potencias?

a) 9^2 y 3^4

b) $(5^2)^2$ y 25^2

7. Escribe en forma de potencia de una potencia:

a) $7^2\cdot7^2\cdot7^2\cdot7^2\cdot7^2$

b) $(-2)^4\cdot(-2)^4\cdot(-2)^4$

8. Escribe en forma de potencia de una potencia:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

9. Calcula el valor de las siguientes potencias de productos:

a) $(5\cdot3)^2$

b) $(-1\cdot3)^3$

c) $(-2\cdot5)^4$

d) $[(-2)\cdot(-3)]^2$

10. Calcula el valor de las siguientes potencias de cocientes:

a) $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ b) $\left(\frac{-4}{2}\right)^3$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ d) $\left(\frac{-3}{2}\right)^2$

11. Calcula los siguientes productos. Expresa el resultado en forma de potencia:

a) $3^5\cdot3^2$

b) $(-7)^5\cdot(-7)^6$

c) $2^4\cdot2^3\cdot2$

d) $x^4\cdot x^{10}$

12. Escribe como una potencia de diez:

a) 1000000000

b) 1000·10000

c) 10·100·1000

13. ¿Qué fracción elevada al cubo da $\frac{1}{27}$?

14. ¿Qué fracción elevada a la quinta potencia da como resultado $\frac{1}{32}$?

15. Calcula los siguientes cocientes. Expresa el resultado en forma de potencia:

a) $\frac{5^6}{5^2}$ b) $\frac{(-2)^{12}}{(-2)^5}$

c) $\frac{3^7}{3^7}$ d) $\frac{x^8}{x^2}$

16. Calcula. Expresa el resultado en forma de potencia:

a) $(3^5)^7$ b) $(x^4)^5$

c) $[(-2)^3]^4$ d) $(y^8)^8$

17. Calcula. Expresa el resultado en forma de potencia:

a) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^5$

b) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^3$

c) $\left[\left(\frac{1}{x}\right)^7\right]^2$

18. Escribe la descomposición polinómica de los siguientes números:

a) 15978

b) 724

c) 4093

d) 99

19. Escribe la masa del protón en notación científica:

0,00000000000000000000000016726 g

20. Escribe en notación científica la masa de la luna:

73490000000000000000000 kg

21. Escribe en notación científica el tamaño del virus que provoca la fiebre aftosa.

0,000000024 m

22. Escribe en notación científica el diámetro ecuatorial del planeta Júpiter.

142984000 m

23. ¿Qué número decimal es $4{,}88 \cdot 10^{-5}$?

24. ¿Qué número decimal es $5{,}06 \cdot 10^{9}$?

25. $78{,}17 \cdot 10^{12}$, aunque está bien escrito, no está bien expresado en notación científica. Escríbelo correctamente en notación científica.

26. $689{,}231 \cdot 10^{-21}$ no está bien expresado en notación científica, aunque es perfectamente válido. Escríbelo de forma correcta en notación científica.

27. Indica si los números siguientes son o no cuadrados perfectos.

a) 51   b) 49

c) 1600   d) 120

28. Calcula las raíces cuadradas de los números siguientes, con una cifra decimal.

a) 449   b) 97

c) 19   d) 605

29. Halla el área de un cuadrado cuyo lado mide 5 m (recuerda que el área de un cuadrado es su lado elevado a 2).

30. Halla el volumen de un cubo cuyo lado mide $\frac{1}{4}$ m (recuerda que el volumen del cubo es su lado elevado a 3).

Para saber más

¿Cómo de grande es el buscador Google?

En muchas ocasiones habrás usado el buscador **Google**. ¿Conoces la historiga de su nombre?

El matemático **Edward Kastner** le pidió a su sobrino de diez años, **Milton Sirotta**, inventar un nombre para un número muy grande:

$$\mathbf{10^{100}}$$

Milton llamó a ese número, un 1 seguido de 100 ceros, un **Googol**. Si te parece que no es un número tan grande, piensa en lo siguiente:

Cuando en 1997 Sergey Brin y Larry Page compran un dominio para su nuevo buscador, adquieren por un error tipográfico google.com en vez de googol.com.

Un googol es enorme, pero mayor es 1 seguido de un googol de ceros, un **googol plex**.

$$1 \text{ googol plex} = 10^{\text{googol}} = 10^{(10^{100})}$$

Una hoja de papel suficientemente grande para escribir un googol plex no cabría dentro del universo

El lenguaje de los ordenadores

Los ordenadores usan cadenas de información formadas por ceros y unos.

Un sistema de numeración de este tipo se denomina **binario**, igual que el que usualmente utilizamos se llama **decimal**, por usar 10 símbolos (0 a 9).

La **descomposición polinómica** de un binario usa potencias de 2 en vez de 10.

Por ejemplo, el **binario 1101** es el **decimal 13**:

$$1101 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$$

Recuerda lo más importante

1. Potencias de un número entero.

Una potencia cuya base es un número entero y cuyo exponente es un número natural, es un producto de factores iguales.

Una potencia de un número positivo es positiva. El opuesto de esa potencia es negativo.

Si la base es negativa y el exponente par o cero, el valor de la potencia será positivo.

Si la base es negativa y el exponente es impar, la potencia será negativa.

Al elevar un entero positivo o negativo a cero, el resultado es 1.

2. Operaciones con potencias.

Potencia de un producto o cociente:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Operaciones con potencias de igual base:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Potencia de una potencia:

$$(a^n)^m = a^{n \bullet m}$$

3a. Potencias de base 10.

Cualquier número puede escribirse como una suma de naturales que multiplican a potencias de base 10, es lo que se conoce como descomposición polinómica de un número:

$$975 = 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

3b. Notación científica.

Un número en notación científica consta de una mantisa multiplicada por una potencia de diez.

La mantisa tendrá una única cifra no nula delante de la coma decimal.

$$243000 = 2{,}43 \cdot 10^5$$

$$0{,}000003002 = 3{,}002 \cdot 10^{-6}$$

4a. Cuadrados perfectos.

Un cuadrado perfecto es un número que es cuadrado de algún número entero.

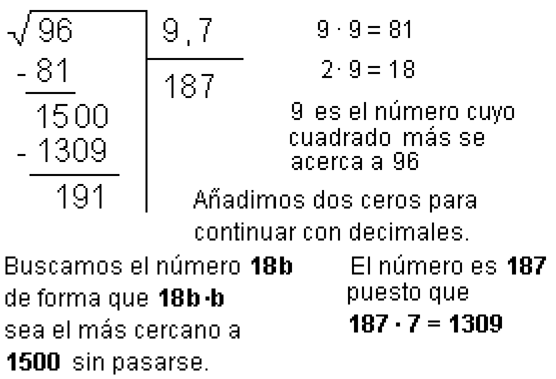
La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es siempre un número entero.

400 es cuadrado perfecto, pues $400=20^2$

Pero 28 no lo es, porque $5^2=25$ y $6^2=36$

4b. Raíces cuadradas.

Ejemplo:



Autoevaluación

1. Calcula el valor de: a) $-1^4 \cdot (-1)^5$ b) $(-1)^0 \cdot (-1^8)$

2. Calcula el valor de: a) $(2 \cdot 8)^2$ b) $\left(\frac{15}{5}\right)^3$

3. ¿Es lo mismo $\frac{(2 \cdot 3)^2}{9}$ que $\frac{(2^2)^2}{4}$?

4. Calcula $3^2 \cdot \frac{(3^5)^2}{3^8}$.

5. Escribe la descomposición polinómica del número 8149.

6. ¿Cuántos de los números comprendidos entre 50 y 150 son cuadrados perfectos?

7. ¿Qué número decimal es $7{,}87 \cdot 10^{-3}$?

8. Escribe en notación científica el número 0,00000694.

9. El número $69{,}27 \cdot 10^{-5}$ no está correctamente escrito en notación científica. Escríbelo de forma correcta. Escribe también el número decimal a que corresponde.

10. Calcula $\sqrt{468}$ con una cifra decimal.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) 7^5 b) $(-5)^6$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^6$ d) $\left(\frac{-1}{2}\right)^4$

2. a) -4 b) 4 c) -1 d) 1

3. a) -27 b) -27 c) -9 d) 9

4. $(-3)^3 < -3^2 < (-3)^0 < (-3)^2 < 3^3$

5. $2^3 > 2^0 = (-2)^0 > -2^0 > -2^2 > -2^3 = (-2)^3$

6. a) sí b) sí

7. a) $(7^2)^5$ b) $[(-2)^4]^3$

8. a) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5\right]^2$ b) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^4$

9. a) 225 b) -27 c) 10000 d) 36

10. a) 12,25 b) -8 c) 0,0625 d) 2,25

11. a) 3^7 b) $(-7)^{11}$ c) 2^8 d) x^{14}

12. a) 10^9 b) 10^7 c) 10^6

13. $\frac{1}{3}$

14. $\frac{1}{2}$

15. a) 5^4 b) $(-2)^7$ c) 3^0 d) x^6

16. a) 3^{35} b) x^{20} c) $(-2)^{12}$ d) y^{64}

17. a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$ c) $\left(\frac{1}{x}\right)^{14}$

18. a) $1\cdot10^4+5\cdot10^3+9\cdot10^2+7\cdot10^1+8\cdot10^0$
b) $7\cdot10^2+2\cdot10^1+4\cdot10^0$
c) $4\cdot10^3+0\cdot10^2+9\cdot10^1+3\cdot10^0$
d) $9\cdot10^1+9\cdot10^0$

19. $1,6726 \cdot 10^{-24}$ g

20. $7,349 \cdot 10^{22}$ kg

21. $2,4 \cdot 10^{-8}$ m

22. $1,42984 \cdot 10^8$ m

23. 0,0000488

24. 5060000000

25. $7,817 \cdot 10^{13}$

26. $6,89231 \cdot 10^{-19}$

27. a) No b) Sí c) Sí d) No

28. a) 21,1 b) 9,8 c) 4,3 d) 24,5

29. 25 m^2

30. $\frac{1}{64}$ m^2 = 0,015625 m^2

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. a) 1 b) -1

2. a) 256 b) -27

3. Sí, ambos valen 4

4. 81

5. $8\cdot10^3 + 1\cdot10^2 + 4\cdot10^1 + 9\cdot10^0$

6. Hay 5: 64, 81, 100, 121 y 144

7. 0,00787

8. $6,94 \cdot 10^{-6}$

9. $6,927 \cdot 10^{-4}$ = 0,0006927

10. 21,6

No olvides enviar las actividades al tutor ▸

2 Fracciones

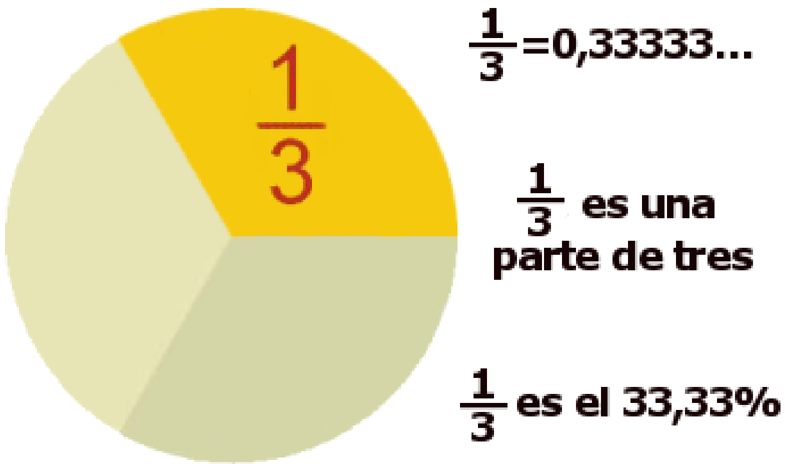
Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Ver si dos fracciones son equivalentes.
- Simplificar fracciones.
- Reducir fracciones a igual denominador.
- Sumar y restar fracciones.
- Multiplicar y dividir fracciones.
- Obtener la inversa de una fracción.
- Calcular potencias de una fracción.
- Hallar la raíz cuadrada de una fracción.

Antes de empezar

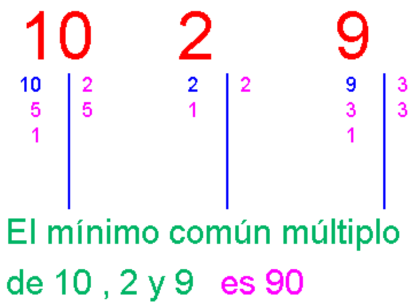
El trabajo con fracciones ya no es nuevo para ti. Ya sabes que una fracción puede verse desde una triple perspectiva.
Puedes ver una fracción simplemente como un **número**. También como una **parte de un total**. O también puedes interpretar una fracción como un **porcentaje**.



Recuerda

Para trabajar con fracciones necesitarás en ocasiones obtener la **descomposición factorial** de un número, así como calcular el **mínimo común múltiplo** de dos o más números.

- Para **descomponer en factores** un número lo dividimos por el primer número primo que podamos.
- Si podemos seguimos dividiendo sucesivamente el cociente por el mismo número primo.
- Cuando no podamos hacer la división por ese número primo lo hacemos por el siguiente primo que se pueda.
- Así sucesivamente hasta que el cociente final sea 1.
- Finalmente ponemos ese número como un producto de potencias de factores primos.



El mínimo común múltiplo de varios números naturales es el número natural más pequeño que es múltiplo de todos esos números a la vez, exceptuando el número 0.

1. Fracciones

Fracciones Equivalentes

Halla el valor de $\frac{6}{4}$ y $\frac{9}{6}$.Dan el mismo resultado. Son dos fracciones **equivalentes**.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a y d reciben el nombre de **extremos**, b y c se llaman **medios**. En el ejemplo los extremos son 6 y 6, los medios 4 y 9.

Observa que si los multiplicamos se obtiene igual resultado: 6·6=36 y 4·9=36.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ son equivalentes si $a \cdot d = b \cdot c$

Vamos a comprobar si las fracciones siguientes son o no equivalentes.

$$\frac{144}{144} \text{ y } \frac{6}{6}$$

Los extremos de las fracciones: 144 y 6

Su producto vale 144·6 = 864

Los medios de las fracciones: 144 y 6

Su producto es 144·6 = 864

Por lo tanto son equivalentes:

$$\frac{144}{144} = \frac{6}{6}$$

Ejercicios: Comprueba si las siguientes fracciones **son** o **no** son equivalentes

a) $\frac{75}{240}$ y $\frac{162}{540}$

b) $\frac{27}{144}$ y $\frac{72}{432}$

PISTA

a) 75· 540 = ?

240·162 =?

b) 27· 432 =?

144· 72 =?

Simplificación de fracciones

Si divides por 2 el numerador y el denominador de $\frac{18}{12}$ obtienes $\frac{9}{6}$, que es equivalente. Ahora puedes dividir 9 y 6 entre 3. Obtienes $\frac{3}{2}$ que no se puede simplificar. Es **irreducible**.

Resumiendo: $\frac{18}{12} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ que es irreducible.

Al **dividir** numerador y denominador de una fracción por un mismo número, se obtiene una fracción **equivalente**.

Vamos a simplificar la fracción siguiente:

$$\frac{765}{1425}$$

- Numerador y denominador se pueden dividir por 3:
  $$\frac{765:3}{1425:3} = \frac{255}{475}$$
- Numerador y denominador se pueden dividir por 5:
  $$\frac{255:5}{475:5} = \frac{51}{95}$$
- $\frac{51}{95}$ es una fracción irreducible

2. Fracciones con igual denominador

Reducción a común denominador

Considera las fracciones $\frac{11}{5}$ y $\frac{13}{7}$.

Para compararlas y realizar cálculos podemos usar otras fracciones equivalentes con igual denominador.

$$\frac{11}{5} = \frac{77}{35} \text{ y } \frac{13}{7} = \frac{65}{35}$$

Al **dividir** numerador y denominador de una fracción por un mismo número, se obtiene una fracción **equivalente**.

Vamos a **reducir a igual denominador** las fracciones: $\frac{87}{30}$ y $\frac{38}{288}$

Hallamos el **m.c.m.** de los denominadores m.c.m. (30,288) = 1440 que será el nuevo denominador de las fracciones.

Dividimos el m.c.m entre el primer denominador: 1440: 30 = 48 y…multiplicamos el resultado por el primer numerador: 48· 87 = 4176, que será el nuevo primer numerador.

Ahora el m.c.m lo dividimos entre el segundo denominador: 1440: 288 = 5 y…multiplicamos el resultado por el segundo numerador: 5· 38 = 190, que será el nuevo segundo numerador.

Así, las fracciones quedan:

$$\frac{4176}{1440} \text{ y } \frac{190}{1440}$$

Ejercicios: Reduce a común denominador:

a) $\frac{38}{144}$ y $\frac{45}{180}$

b) $\frac{9}{24}$ y $\frac{4}{12}$

c) $\frac{23}{36}$ y $\frac{22}{180}$

d) $\frac{21}{180}$ y $\frac{24}{10}$

PISTA: a) m.c.m.(144, 180) = 720

b) m.c.m.(36, 180) = 180

Comparación de fracciones

¿Qué fracción es mayor, $\frac{8}{11}$ o $\frac{5}{7}$?

Vamos a reducirlas a común denominador:

$$\frac{8}{11} = \frac{56}{77} \text{ y } \frac{5}{7} = \frac{55}{77}$$

La primera fracción es mayor: $\frac{8}{11} > \frac{5}{7}$

Es conveniente que uses los símbolos **mayor que**, **>**, y **menor que**, **<**.

Vamos a **comparar** las fracciones: $\frac{8}{17}$ y $\frac{3}{4}$

Hallamos el **m.c.m.** de los denominadores m.c.m. (17, 4) = 68

Reducimos las dos fracciones a denominador común:

$$\frac{8}{17} = \frac{32}{68} \text{ y } \frac{3}{4} = \frac{51}{68}$$

Ahora ya podemos comparar las fracciones:

$$\frac{32}{68} < \frac{51}{68} \text{ luego } \frac{8}{17} < \frac{3}{4}$$

Ejercicios: Compara las siguientes fracciones:

a) $\frac{7}{9}$ y $\frac{1}{5}$

b) $\frac{4}{14}$ y $\frac{3}{7}$

c) $\frac{8}{17}$ y $\frac{2}{3}$

d) $\frac{5}{9}$ y $\frac{3}{4}$

PISTA: a) m.c.m. (9, 5) = 45

b) m.c.m. (17, 3) = 51

c) m.c.m. (14, 7) =?

d) m.c.m. (9, 4) =?

3. Operaciones con fracciones

Suma y resta

Para sumar fracciones de **denominador igual** deja el denominador y suma los numeradores.

$$\frac{4}{11}+\frac{3}{11}=\frac{4+3}{11}=\frac{7}{11}$$

Si son fracciones de **distinto denominador** las reduciremos primero a común denominador.

Es lo mismo $\frac{4}{5}+\frac{3}{7}$ que $\frac{28}{35}+\frac{15}{35}=\frac{43}{35}$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \quad \text{y} \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Ejercicios: Calcula el valor de:

a) $\frac{1625}{2875}-\frac{272}{32}$ b) $\frac{11}{19}+\frac{39}{69}$

c) $\frac{1375}{2375}-\frac{208}{368}$ d) $\frac{1053}{1863}+\frac{17}{2}$

Ejercicio resuelto: Simplifica cada fracción y calcula:

$$-\frac{1053}{1863}+\frac{17}{2}-\frac{38}{6}$$

En primer lugar simplifico las fracciones:

$$\frac{1053}{1863}=\frac{13}{23} \quad ; \quad \frac{17}{2} \quad ; \quad \frac{38}{6}=\frac{19}{3}$$

Queda: $-\frac{13}{23}+\frac{17}{2}-\frac{19}{3}$ Ahora opero:

Calculo **m.c.m**. (23, 2,3) = 138 y:

$$-\frac{13}{23}+\frac{17}{2}-\frac{19}{3}=-\frac{78}{138}+\frac{1173}{138}-\frac{874}{138}$$

La solución es: $\frac{221}{138}$

PISTA: Intenta simplificar primero cada fracción

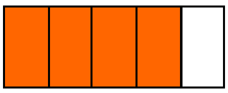
Después calcula el m.c.m. de los denominadores. (Será el nuevo denominador)

Divide el m.c.m. por cada denominador y multiplícalo por su correspondiente numerador. (Obtendrás los nuevos numeradores)

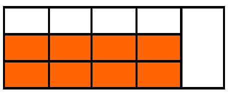
Ya puedes sumar o restar las fracciones.

Producto de fracciones

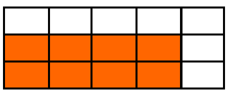
La figura representa a $\frac{4}{5}$



Vamos a hallar $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$. Dividimos $\frac{4}{5}$ en tres partes y tomamos dos: $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$



Del total, tenemos $\frac{8}{15}$



Recuerda: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

Ejercicio resuelto: Vamos a calcular el valor del siguiente producto:

$$\frac{5}{90}\cdot\frac{41}{42}$$

Si es posible simplificamos las fracciones:

$\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$ $\quad$ $\frac{41}{42}$ es irreducible

Multiplicamos los numeradores y denominadores:

$$\frac{1}{18}\cdot\frac{41}{42}=\frac{1\cdot 41}{18\cdot 42}=\frac{41}{756}$$

Si es posible, simplificamos el resultado.

En este caso $\frac{41}{756}$ es irreducible.

3. Operaciones con fracciones

Cociente de fracciones

Dos fracciones son **inversas** si su producto es 1. Por ejemplo $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{3}$ lo son pues $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1$

Y escribiremos: $\dfrac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$. En general: $\dfrac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$

Para dividir fracciones multiplica en cruz:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \rightarrow \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejercicio resuelto: Vamos a calcular el valor del siguiente cociente:

$$\frac{10}{84} : \frac{4}{12}$$

Si es posible simplificamos las fracciones:

$$\frac{10}{84} = \frac{5}{42} \qquad \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Multiplicamos numeradores y denominadores en cruz:

$$\frac{5}{42} : \frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 3}{42 \cdot 1} = \frac{15}{42}$$

Si es posible, simplificamos el resultado.

$$\frac{15}{42} = \frac{5}{14}.$$

Ejercicios: Calcula el valor de los cocientes:

a) $\frac{44}{36} : \frac{19}{24}$ b) $\frac{69}{24} : \frac{29}{18}$

c) $\frac{73}{12} : \frac{44}{3}$ d) $\frac{52}{40} : \frac{56}{10}$

PISTA: Intenta simplificar primero cada fracción

Multiplica numeradores y denominadores en cruz

Si es posible, simplifica el resultado

Potencia de una fracción

¿Cuánto vale $\left(\frac{5}{2}\right)^3$? Desarrollemos la potencia:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5^3}{2^3}$$

Para obtener la **potencia** de una fracción debes efectuar el cociente entre las potencias del numerador y el denominador.

Recuerda: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$

Ejercicio resuelto: Vamos a obtener el valor de: $\left(\frac{3}{5}\right)^8$

Elevamos numerador y denominador al exponente

$$\left(\frac{3}{5}\right)^8 = \frac{3^8}{5^8}$$

Calculamos la potencia:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^8 = \frac{3^8}{5^8} = \frac{6561}{390625}$$

Ejercicios: Calcula el valor de las potencias:

a) $\left(\frac{2}{7}\right)^6$ b) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$

c) $\left(\frac{7}{2}\right)^6$ d) $\left(\frac{2}{13}\right)^7$

3. Operaciones con fracciones

Raíz cuadrada de una fracción

Para obtener la raíz cuadrada de una fracción, haz la raíz del numerador y el denominador.

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} \text{ y también: } \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

La razón es que: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ y $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

luego, habrá una **raíz positiva** y una **negativa**.

Recuerda: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ y $-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Ejercicio resuelto: Vamos a obtener el valor de:

$$\sqrt{\frac{9}{169}}$$

Hallamos la raíz del numerador y denominador:

$$\sqrt{\frac{9}{169}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{169}} = \frac{3}{13}$$

Por ser raíz cuadrada hay otra solución:

$$\sqrt{\frac{9}{169}} = -\frac{3}{13}$$

Ejercicios: Calcula el valor de:

a) $\sqrt{\frac{49}{25}}$ b) $\sqrt{\frac{121}{169}}$

c) $\sqrt{\frac{16}{36}}$ d) $\sqrt{\frac{81}{25}}$

Operaciones combinadas con fracciones

Para realizar operaciones combinadas con fracciones hay una serie de cuestiones que conviene tengas en cuenta:

- El orden de las operaciones es de izquierda a derecha.
- Las multiplicaciones y divisiones se realizan antes que las sumas y restas.
- Si aparecen paréntesis, sus operaciones tienen prioridad.
- Los paréntesis anidados se realizan de dentro a fuera.
- No suele ser conveniente que esperes al final del ejercicio para simplificar.

Ejercicio resuelto: Vamos a obtener el valor de:

$$\frac{\frac{2}{5} + \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{4}}{\frac{3}{8} + \frac{5}{2}}$$

Operamos por separado en el numerador y denominador:

$$\frac{\frac{2}{5} + \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{4}}{\frac{3}{8} + \frac{5}{2}} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{54}{28}}{\frac{23}{8}} = \frac{\frac{326}{140}}{\frac{23}{8}}$$

Dividimos, multiplicando en cruz:

$$\frac{\frac{326}{140}}{\frac{23}{8}} = \frac{2608}{3220}$$

Si es posible, simplificamos el resultado.

$$\frac{2608}{3220} = \frac{652}{805}$$

Ejercicios: Calcula el valor de:

a) $\dfrac{\frac{7}{6} \cdot \left(\frac{9}{4} - \frac{8}{3}\right)}{\frac{11}{2} : \frac{4}{7}}$ b) $\dfrac{3}{8} + \dfrac{11}{4 + \dfrac{2}{9 + \dfrac{6}{7}}}$

4. Problemas de aplicación

PROBLEMA 1. La semana pasada he leído $\frac{1}{7}$ de un libro. A lo largo de esta semana he podido leer $\frac{4}{5}$ del resto. En total he leído 87 páginas del libro. ¿Cuántas páginas en total tiene el libro?

Solución: 105 páginas

PROBLEMA 2. Hemos vaciado agua contenida en un barril, en 41 recipientes de $\frac{3}{4}$ litros cada uno. Todos han quedado llenos salvo uno que se ha llenado por la mitad. En el barril han sobrado 14 litros. ¿Cuántos litros de agua contenía el barril?

Solución: 44,37 litros

PROBLEMA 3. Esta previsto destinar $\frac{3}{14}$ de una finca a plazas de aparcamiento. Pero se han destinado $\frac{3}{4}$ de lo previsto a zonas ajardinadas. ¿Qué fracción de la finca se ha destinado finalmente a zonas de aparcamiento?

Solución: $\frac{3}{56}$ **para aparcamientos**

PROBLEMA 4. De un depósito de cereales se han extraído los $\frac{8}{10}$. Al día siguiente se extrae $\frac{1}{4}$ del resto. ¿Qué fracción del total se ha extraído del depósito?

Solución: $\frac{17}{20}$ **del total**

EJERCICIOS resueltos

Fracciones equivalentes. Simplificación

1. ¿Son equivalentes $\frac{27}{144}$ y $\frac{720}{1440}$ **?**

El producto de extremos vale 27·144= 38880 y el producto de medios 144·720=103680

Los dos productos no coinciden y, por lo tanto, no son equivalentes:

2. Simplifica la fracción $\frac{510}{2850}$

- Numerador y denominador se pueden dividir por 2: $\frac{510:2}{2850:2} = \frac{255}{1425}$
- Numerador y denominador se pueden dividir entre 3: $\frac{255:3}{1425:3} = \frac{85}{475}$
- Numerador y denominador se pueden dividir entre 5: $\frac{85:5}{475:3} = \frac{17}{95}$
- $\frac{17}{95}$ es irreducible.

Fracciones con igual denominador

3. Reduce a igual denominador las fracciones: $\frac{17}{105}$ y $\frac{14}{144}$

- Hallamos el **m.c.m.** de los denominadores m.c.m. (105,144) = 5040 que será el nuevo denominador.
- Dividimos el m.c.m entre el primer denominador: 5040: 105 = 48.
- Multiplicamos el resultado por el primer numerador: 48· 17 = 816, que será el nuevo primer numerador.
- Ahora el m.c.m lo dividimos entre el segundo denominador: 5040:144 = 35.
- Y multiplicamos el resultado por el segundo numerador: 35· 14 = 490, que será el nuevo segundo numerador.
- Así, las fracciones quedan: $\frac{816}{5040}$ y $\frac{490}{5040}$, fracciones con igual denominador.

4. Reduce a igual denominador las fracciones: $\frac{6}{576}$, $\frac{48}{192}$ y $\frac{25}{72}$

- Hallamos el **m.c.m.** de los denominadores m.c.m. (576, 192,72) = 576 que será el nuevo denominador de las fracciones.
- Dividimos el m.c.m entre cada denominador, multiplicando el resultado por el correspondiente numerador.
- Así, las fracciones quedan: $\frac{6}{576}$, $\frac{144}{576}$ y $\frac{200}{576}$.

EJERCICIOS resueltos (continuación)

Operaciones con fracciones

5. Simplifica cada fracción y calcula:

$$-\frac{375}{1375}+\frac{80}{208}-\frac{7}{17}$$

En primer lugar simplifico las fracciones:

$$\frac{375}{1375}=\frac{3}{11}\;;\quad \frac{80}{208}=\frac{5}{13}\;;\quad \frac{7}{17}\text{ es irreducible}$$

Queda: $-\frac{375}{1375}+\frac{80}{208}-\frac{7}{17}=-\frac{663}{2431}+\frac{935}{2431}-\frac{1001}{2431}=\frac{-729}{2431}$

6. Calcula el valor del siguiente producto:

$$\frac{24}{90}\cdot\frac{11}{180}\cdot\frac{36}{15}$$

Si es posible simplificamos las fracciones:

$$\frac{24}{90}\cdot\frac{11}{180}\cdot\frac{36}{15}=\frac{4}{15}\cdot\frac{11}{180}\cdot\frac{12}{5}$$

Multiplicamos los numeradores y denominadores:

$$\frac{4\cdot 11\cdot 12}{15\cdot 180\cdot 5}=\frac{528}{13500}$$

Si es posible, simplificamos el resultado. $\frac{528}{13500}=\frac{44}{1125}$

7. Calcula el valor del siguiente cociente $\frac{43}{16}:\frac{11}{30}$

Si es posible simplificamos las fracciones. En este caso ambas son irreducibles.

Multiplicamos numeradores y denominadores en cruz:

$$\frac{43}{16}:\frac{11}{30}=\frac{43\cdot 30}{16\cdot 30}=\frac{1290}{176}$$

Y, si es posible, simplificamos el resultado $\frac{1290}{176}=\frac{645}{88}$.

8. Calcula la siguiente potencia: $\left(\frac{5}{7}\right)^6$

Elevamos numerador y denominador al exponente $\left(\frac{5}{7}\right)^6=\frac{5^6}{7^6}$

Calculamos las potencias: $\left(\frac{5}{7}\right)^6=\frac{5^6}{7^6}=\frac{15625}{117649}$

EJERCICIOS resueltos (continuación)

Operaciones con fracciones

9. Indica las dos soluciones de la raíz $\sqrt{\frac{4}{121}}$

Hallamos la raíz del numerador y denominador:

$$\sqrt{\frac{4}{121}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{121}} = \frac{2}{11}$$

Por ser raíz cuadrada hay otra solución:

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{121}} = -\frac{2}{11}$$

10. Calcula: $\dfrac{\frac{11}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{9}}{\frac{4}{3} + \frac{2}{11}}$

Operamos por separado en el numerador y denominador: $\dfrac{\frac{11}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{9}}{\frac{4}{3} + \frac{2}{11}} = \dfrac{\frac{11}{2} + \frac{35}{54}}{\frac{50}{33}} = \dfrac{\frac{332}{54}}{\frac{50}{33}}$

Dividimos, multiplicando en cruz: $\dfrac{\frac{332}{54}}{\frac{50}{33}} = \dfrac{10956}{2700}$

Si es posible, simplificamos el resultado. $\dfrac{10956}{2700} = \dfrac{913}{225}$

11. Calcula: $\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{11}\right)^2 + \frac{2}{5}$

Operamos primero el paréntesis: $\left(\frac{44}{33} - \frac{24}{33}\right)^2 + \frac{2}{5} = \left(\frac{20}{33}\right)^2 + \frac{2}{5}$.

Hacemos la potencia $\frac{400}{1089} + \frac{2}{5}$ Sumamos: $\frac{400}{1089} + \frac{2}{5} = \frac{2000}{5445} + \frac{2178}{5445} = \frac{4178}{5445}$

En este caso no podemos simplificar el resultado. $\frac{4178}{5445}$ es una fracción irreducible.

12. Calcula: $\dfrac{\frac{7}{6} \cdot \left(\frac{9}{4} - \frac{8}{3}\right)}{\frac{11}{2} : \frac{4}{7}} = \dfrac{\frac{7}{6} \cdot \frac{59}{12}}{\frac{77}{8}} = \dfrac{\frac{413}{72}}{\frac{77}{8}}$. Dividimos multiplicando en cruz $\frac{3304}{5544}$.

Simplificamos el resultado $\frac{3304}{5544} = \frac{59}{99}$

Para practicar

Equivalencia de fracciones

1. Comprueba si son o no equivalentes las siguientes fracciones:

a) $\frac{108}{72}$ y $\frac{292}{192}$ b) $\frac{54}{90}$ y $\frac{93}{150}$

c) $\frac{36}{96}$ y $\frac{123}{320}$ d) $\frac{14}{43}$ y $\frac{70}{215}$

Simplificar fracciones

2. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{40}{64}$ b) $\frac{72}{162}$

c) $\frac{80}{128}$ d) $\frac{36}{172}$

Reducir a común denominador

3. Reduce a común denominador las siguientes fracciones:

a) $\frac{12}{20}, \frac{24}{32}$ y $\frac{6}{24}$

b) $\frac{16}{28}, \frac{6}{16}$ y $\frac{15}{24}$

c) $\frac{10}{24}, \frac{20}{45}$ y $\frac{6}{18}$

d) $\frac{8}{22}, \frac{36}{48}$ y $\frac{15}{33}$

Suma y resta de fracciones

4. Realiza las operaciones siguientes y simplifica el resultado cuando sea posible:

a) $\frac{8}{36} - \frac{15}{45} - \frac{8}{20}$

b) $\frac{10}{22} - \frac{28}{52} - \frac{4}{18}$

c) $-\frac{9}{15} + \frac{25}{45} - \frac{10}{20}$

d) $\frac{10}{16} - \frac{10}{20} - \frac{9}{24}$

Producto de fracciones

5. Calcula el valor del producto de las siguientes fracciones y simplifica el resultado cuando sea posible:

a) $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{11} \cdot \frac{8}{12}$

c) $\frac{9}{11} \cdot \frac{7}{10}$ d) $\frac{6}{5} \cdot \frac{7}{11}$

Cociente de fracciones

6. Calcula el valor del producto de las siguientes fracciones y simplifica el resultado cuando sea posible:

a) $\frac{5}{10} : \frac{12}{6}$ b) $\frac{7}{7} : \frac{9}{5}$

c) $\frac{8}{4} : \frac{4}{5}$ d) $\frac{6}{9} : \frac{7}{5}$

Potenciación

7. Calcula el valor de las siguientes potencias y simplifica el resultado cuando sea posible:

a) $\left(\frac{7}{9}\right)^4$ b) $\left(\frac{4}{9}\right)^4$

c) $\left(\frac{6}{9}\right)^2$ d) $\left(\frac{7}{6}\right)^3$

Raíz cuadrada

8. Halla el resultado de las siguientes raíces. Da las dos soluciones posibles:

a) $\sqrt{\frac{16}{36}}$ b) $\sqrt{\frac{25}{64}}$

c) $\sqrt{\frac{9}{25}}$ d) $\sqrt{\frac{25}{36}}$

Operaciones combinadas

9. Realiza las operaciones siguientes y simplifica el resultado cuando sea posible:

a) $\frac{9}{4}+\frac{3}{8}\cdot\frac{11}{2}$

b) $\frac{2}{5}+\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{4}$

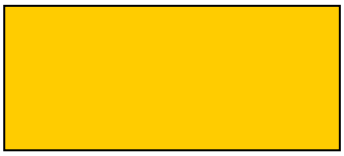
c) $\left(4+\frac{8}{11}\right):\left(2+\frac{6}{7}\right)$

d) $\frac{8}{11}:\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{7}$

Problemas con fracciones

10. ¿Cuántos botellines de refresco de $\frac{1}{5}$ de litro podemos llenar con 417 litros de refresco?

11. Expresa en forma de fracción el área de un rectángulo cuya base mide $\frac{5}{6}$ m y cuya altura mide $\frac{7}{9}$ m.



12. Un camión contiene 900 Kg. de patatas. Descarga $\frac{1}{3}$ de su carga. Del resto descarga los $\frac{2}{5}$. ¿Cuántos Kg. de patatas quedan?

13. En una ciudad de 470 habitantes, 85 practican deporte regularmente. ¿Qué fracción del total no practican deporte con regularidad? ¿Qué tanto por ciento es?

14. La semana pasada he leído $\frac{1}{3}$ de un libro. A lo largo de esta semana he podido leer $\frac{6}{7}$ del resto. En total he leído 38 páginas del libro. ¿Cuántas páginas en total tiene el libro?

15. Hemos vaciado agua contenida en un barril, en 22 recipientes de $\frac{2}{3}$ litros cada uno. Todos han quedado llenos salvo uno que se ha llenado por la mitad. En el barril han sobrado 10 litros. ¿Cuántos litros de agua contenía el barril?

16. Esta previsto destinar $\frac{6}{9}$ de una finca a plazas de aparcamiento. Pero se han destinado $\frac{6}{7}$ de lo previsto a zonas ajardinadas. ¿Qué fracción de la finca se ha destinado finalmente a zonas de aparcamiento?

17. De un depósito de cereales se han extraído los $\frac{9}{11}$. Al día siguiente se extrae $\frac{1}{9}$ del resto. ¿Qué fracción del total se ha extraído del depósito?

Para saber más

El Ojo de Horus

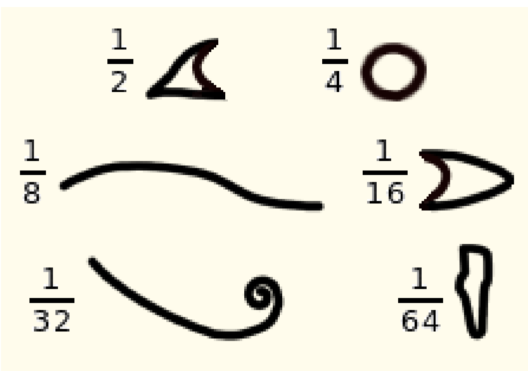
La imagen de arriba, de origen egipcio, es el ojo de **Horus**, el **Udyat**. Horus había perdido el ojo en combate, pero fue sustituido por el Udyat por intervención del dios Thot.

Para los antiguos egipcios, el Udyat simbolizaba el estado de perfección y le atribuían cualidades sanadoras. También les servía para escribir números.

Es posible escribir cualquier fracción positiva como suma de fracciones de numerador la unidad. Una suma de este tipo se llama una **fracción egipcia**. Son fracciones egipcias:

$$\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \quad \text{y} \quad \frac{19}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

Los jeroglíficos usados por los egipcios para escribir las fracciones más frecuentes en medidas agrarias de capacidad y volumen, eran partes del Ojo de Horus.



Una fracción interminable

Mira como está escrita esta fracción,

$$\frac{27}{19}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

¿Y si seguimos el proceso indefinidamente?

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$

Se obtiene una fracción **continua**, cuyo resultado, ¡no es una fracción!

Con fracciones continuas pueden escribirse números tan importantes en matemáticas como **φ**, el **número de oro**.

$$\varphi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

Puedes encontrar más información en la **wikipedia**:

Número de oro:
http://es.wikipedia.org/wiki/Número_áureo

Fracción continua:
http://es.wikipedia.org/wiki/Fracción_continua

Recuerda lo más importante

- **¿Cuándo son equivalentes dos fracciones?** Cuando su producto de extremos y medios coincide.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{si cumple } \; a\cdot d=c\cdot d$$

- **¿Cómo se simplifican fracciones?** Debes dividir numerador y denominador entre un mismo factor. Si el **m.c.d.** del numerador y el denominador es la unidad, la fracción ya no se puede simplificar más, es **irreducible**.

$$\frac{20}{12}=\frac{20:2}{12:2}=\frac{10}{6}=\frac{10:2}{6:2}=\frac{5}{3}$$

Si sabes el mcd del numerador y el denominador, lo mejor es dividir directamente por esa cantidad. La fracción resultante será irreducible.

m.c.d.(20,12)=4

$$\frac{20}{12}=\frac{20:4}{12:4}=\frac{5}{3}$$

- **¿Cómo se reducen fracciones a igual denominador?** Divide el **m.c.m.** de los denominadores entre el denominador y multiplica por el numerador.

$$\frac{8}{9} \text{ y } \frac{3}{5} \text{ equivalen a } \frac{40}{45} \text{ y } \frac{27}{45}$$

- **¿Cómo se suman y restan fracciones?** Deben tener el mismo denominador.

$$\frac{7}{9}+\frac{6}{5}=\frac{7\cdot 5}{45}+\frac{6\cdot 9}{45}=\frac{89}{45}$$

- **¿Cómo se multiplican fracciones?** Multiplica numeradores y denominadores.

$$\frac{6}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6\cdot 3}{6\cdot 5}=\frac{18}{30}$$

- **¿Cómo se dividen fracciones?** Multiplica en cruz los numeradores y denominadores.

$$\frac{5}{8}:\frac{5}{5}=\frac{5\cdot 5}{8\cdot 5}=\frac{25}{40}$$

- **¿Cómo se obtiene la potencia de una fracción?** Eleva el numerador y el denominador.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2^3}{5^3}=\frac{8}{125}$$

- **¿Cómo se extrae la raíz de una fracción?** Extrae la raíz del numerador y el denominador

$$\sqrt{\frac{100}{81}}=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{81}}=\frac{10}{9} \quad y \quad -\frac{10}{9}$$

Autoevaluación

1. Halla una fracción irreducible equivalente a $\frac{96}{216}$.

2. Sin simplificarlas, reduce a común denominador $\frac{6}{24}$ y $\frac{16}{36}$.

3. Calcula $\frac{8}{18}+\frac{12}{36}$. El resultado debe ser irreducible.

4. Calcula $\frac{20}{36}-\frac{8}{14}$ (en forma irreducible).

5. Obtén la fracción irreducible equivalente a $\frac{12}{20}+\frac{20}{35}+\frac{30}{42}$.

6. Halla $\frac{15}{27}-\frac{8}{24}+\frac{10}{20}$, expresado de forma irreducible.

7. Calcula $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{11}$. Simplifica el resultado.

8. Halla el valor de $\frac{7}{9}:\frac{5}{10}$. El resultado debe estar simplificado.

9. Una rueda avanza $\frac{4}{6}$ metros para dar una vuelta. ¿Cuántas vueltas debe dar para avanzar 8 metros?

10. Halla $\sqrt{\frac{16}{64}}$.

Soluciones de los ejercicios propuestos en los Contenidos

Fracciones equivalentes

a) No son equivalentes, puesto que el producto de medios y extremos no coinciden.

b) No son equivalentes, puesto que el producto de medios y extremos no coinciden.

Reducción a común denominador

a) $\frac{190}{720}$ y $\frac{180}{720}$

b) $\frac{9}{24}$ y $\frac{8}{24}$

c) $\frac{115}{180}$ y $\frac{22}{180}$

d) $\frac{21}{180}$ y $\frac{432}{180}$

Comparación de fracciones

a) $\frac{7}{9} > \frac{1}{5}$

b) $\frac{4}{14} < \frac{3}{7}$

c) $\frac{8}{17} < \frac{2}{3}$

d) $\frac{5}{9} < \frac{3}{4}$

Suma y resta

a) $-\frac{365}{46}$

b) $\frac{500}{437}$

c) $\frac{6}{437}$

d) $\frac{417}{46}$

Cociente de fracciones

a) $\frac{88}{57}$

b) $\frac{207}{116}$

c) $\frac{73}{176}$

d) $\frac{13}{56}$

Potencias

a) $\frac{64}{117649}$

b) $\frac{81}{625}$

c) $\frac{117649}{64}$

d) $\frac{128}{62748517}$

Raíces

a) $\frac{7}{5}$ y $-\frac{7}{5}$

b) $\frac{11}{13}$ y $-\frac{11}{13}$

c) $\frac{2}{3}$ y $-\frac{2}{3}$

d) $\frac{9}{5}$ y $-\frac{9}{5}$

Operaciones combinadas

a) $-\frac{5}{99}$

b) $\frac{1213}{536}$

Problemas de aplicación

PROBLEMA 1.

La semana pasada he leído $\frac{1}{7}$ del libro. Me quedan por leer $\frac{6}{7}$. Esta semana he leído $\frac{4}{5}$ del resto, es decir $\frac{4}{5}$ de $\frac{6}{7}$.

Del total he leído

$$\frac{1}{7} + \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{24}{35} = \frac{29}{35}.$$

Es decir, $\frac{29}{35}$ del total resultan ser 87 páginas.

Luego el total será:

Total $= 87 \cdot \frac{35}{29} =$ **105 páginas**

PROBLEMA 2.

Se han llenado 40 recipientes de $\frac{3}{4}$ de litro. Es decir $40 \cdot \frac{3}{4} = 30$ litros de agua.

Uno ha quedado por la mitad.

Son $\frac{3}{4} : 2 = 0{,}37$ litros más.

Por último han sobrado 14 litros.

En total tenemos: **44,37 litros** de agua en el barril

PROBLEMA 3

Para aparcamientos se había reservado $\frac{3}{14}$ de la finca.

Se ha usado $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{14}$ para zonas ajardinadas.

Para aparcamientos nos quedará $\frac{3}{14} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{14}$ del total.

$$\frac{3}{14} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{14} - \frac{9}{56} = \frac{3}{56}$$

Solución: $\frac{3}{56}$ se habrá reservado para aparcamientos.

PROBLEMA 4

El primer día se sacó $\frac{8}{10}$ del total.

El segundo día se extrajeron $\frac{1}{4}$ de $1 - \frac{8}{10}$.

Es decir, el segundo día se sacaron $\frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{8}{10}) = \frac{2}{40}$ del total.

Solución: La fracción del total extraída ha sido $\frac{8}{10} + \frac{2}{40} = \frac{17}{20}$

Soluciones de los ejercicios para practicar

Equivalencia de fracciones

1.a) No. Los productos cruzados no coinciden.

b) No. Los productos cruzados no coinciden

c) No. Los productos cruzados no coinciden

d) Si.

Simplificar fracciones

2. a) $\frac{5}{8}$

b) $\frac{4}{9}$

c) $\frac{5}{8}$

d) $\frac{1}{2}$

Reducir a común denominador

3. a) $\frac{12}{20}$, $\frac{15}{20}$ y $\frac{5}{20}$

b) $\frac{32}{56}$, $\frac{21}{56}$ y $\frac{35}{56}$

c) $\frac{15}{36}$, $\frac{16}{36}$ y $\frac{35}{36}$

d) $\frac{16}{44}$, $\frac{33}{44}$ y $\frac{20}{44}$

Suma y resta de fracciones

4. a) $-\frac{23}{45}$

b) $\frac{-394}{1287}$

c) $-\frac{49}{90}$

d) $\frac{-1}{4}$

Producto de fracciones

5. a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{10}{33}$

c) $\frac{63}{110}$

d) $\frac{42}{55}$

Cociente de fracciones

6. a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{5}{2}$

d) $\frac{10}{21}$

Potenciación

7. a) $\frac{2401}{6561}$

b) $\frac{256}{6561}$

c) $\frac{4}{9}$

d) $\frac{343}{216}$

Raíz cuadrada

8. a) $\frac{2}{3}$ y $-\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{5}$ y $-\frac{3}{5}$

c) $\frac{5}{8}$ y $-\frac{5}{8}$

d) $\frac{5}{6}$ y $-\frac{5}{6}$

Operaciones combinadas

9. a) $\frac{69}{16}$

b) $\frac{163}{70}$

c) $\frac{91}{55}$

d) $\frac{120}{77}$

Problemas con fracciones

10. Podemos llenar 2085 botellines de refresco.

11. El área del rectángulo es $\frac{35}{54}$ m^2

12. Quedan en el camión 360 Kg. De patatas.

13. No practican deporte con regularidad un $\frac{77}{94}$ del total, lo que supone un 81%.

14. El libro tiene en total 42 páginas.

15. Han sobrado 22, 43 litros del barril.

16. Se ha destinado del total de la finca una fracción de $\frac{2}{21}$ del total.

17. La fracción del total extraída ha sido $\frac{83}{99}$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. $\frac{6}{5}$.
2. $\frac{35}{30}$ y $\frac{8}{30}$.
3. $\frac{9}{70}$.
4. $\frac{3}{30}$.
5. $\frac{53}{20}$.
6. $\frac{35}{12}$.
7. $\frac{5}{11}$.
8. $\frac{14}{9}$.
9. 12 vueltas.
10. $-\frac{4}{8}$ y $\frac{4}{8}$.

3 Números decimales

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Identificar los distintos elementos de un número decimal.
- Realizar aproximaciones con números decimales mediante redondeo y truncamiento.
- Sumar y restar números decimales.
- Realizar multiplicaciones y divisiones en las que intervienen números decimales.
- Calcular potencias de números decimales.
- Obtener raíces de números decimales sencillos sin la ayuda de la calculadora.
- Distinguir si una fracción da como resultado un número entero, decimal exacto o periódico.
- Obtener la fracción generatriz de un número decimal.

Antes de empezar

La medida del tiempo ha sido un reto cuya solución se ha abordado de muy diversas maneras y que ha sido fundamental para el desarrollo de la humanidad.

Conocer por ejemplo la época del año ha sido muy importante para el desarrollo de la agricultura

Con el paso del tiempo ha aumentado la necesidad de conocer con mayor precisión la hora.

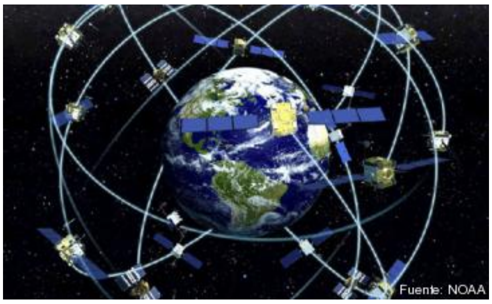
Medir con exactitud la hora permite por ejemplo predecir la evolución de las mareas, facilitando el tráfico marítimo.

Hoy es posible medir el tiempo con gran precisión. Así, podemos usar más decimales para expresar una hora.

Con un cronómetro podemos medir segundos, décimas y centésimas de segundos.
Una medición de **45,56 segundos** es impensable con un reloj de sol o de arena.

Los relojes más precisos que existen son los **relojes atómicos**, que obtienen la hora midiendo el ritmo al que vibra un electrón de un átomo determinado. Un reloj atómico de **Cesio** puede medir 0,0000000001 s.

¿Y para qué es necesaria tanta precisión?



Las telecomunicaciones modernas (teléfono, radio, TV…) dependen de una red de satélites artificiales que orbitan alrededor de la Tierra.

Para controlar el movimiento de estos satélites es imprescindible medir el tiempo con gran exactitud

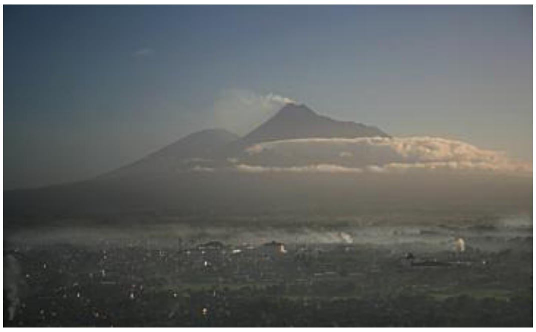
Un error de 0,001 s en el tiempo puede provocar errores en la interpretación de los datos que proporciona el satélite.

La importancia de este error dependerá del uso que se de a esta información.

Si estamos intentando predecir una erupción volcánica o un terremoto, es necesario medir el tiempo con una precisión de al menos tres milésimas de segundo: **un microsegundo**.

Por ejemplo, **23:42:45.125**, que equivaldría a **23 horas**, **42 minutos** y **45,125 segundos.**

Investiga: Busca información en la Wikipedia sobre el Sistema de Posicionamiento Global, GPS, y los Relojes Atómicos.: http://es.wikipedia.org



1. Números decimales

Elementos de un número decimal

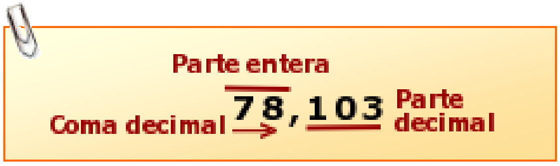
Un número decimal tiene una **parte entera** y una **parte decimal**, separadas por la **coma decimal**. Por ejemplo, observa el número **31,245**.

3 y 1 son sus cifras enteras. 2, 4 y 5 son sus cifras decimales.

3,45 es un **decimal exacto**, pues tiene un número finito de cifras decimales.

39 es un **número entero**. No tiene decimales.

2,3333... es un **decimal periódico**. Tiene infinitas cifras decimales.



Redondeo y truncamiento de un decimal

Podemos aproximar un número decimal por otro que tenga menor número de cifras decimales. Esto podemos hacerlo de dos formas distintas:

Mediante **truncamiento**. Dejamos el número de decimales deseado, quitando los demás.

Mediante **redondeo**. La cifra que redondeamos aumenta en uno si la primera cifra suprimida es mayor o igual que 5. En otro caso no varía.

Por ejemplo **3,4578** con dos decimales se aproxima como **3,45** mediante truncamiento, y **3,46** mediante redondeo.

Recuerda, solo debes **aumentar** la cifra redondeada si la primera cifra que quitas es 5,6,7,8 ó 9.

Ejercicio: Aproxima los siguientes números a 2 cifras decimales por redondeo y por truncamiento:

a) 60,616685821 b) 36,472742211

Ejercicio resuelto:

Vamos a comprobar cuál es la parte entera y la parte decimal del siguiente número decimal: **8,95**

Su parte entera es: **8**.

Su parte decimal es **0,95**.

El número es decimal **exacto**.

Ejercicios: Comprueba si los siguientes números son enteros, decimales exactos o decimales periódicos:

a) 738,555...
b) 5,59
c) 124,18383...
d) 10,75
e) 2305

Ejercicios resueltos:

a) Vamos a aproximar el número

39,188311524

a **3 cifras** decimales

La primera cifra que quitamos es: **3**

La primera cifra a redondear es: **8**

Como **3<5**, dejamos 8 como está.

La aproximación:

por redondeo es **39,188**

por truncamiento es **39,188**

b) Vamos a aproximar el número

66,444882477

a **4 cifras** decimales

La primera cifra que quitamos es: **8**

La primera cifra a redondear es: **8**

Como **8>4**, dejamos 8 como está.

La aproximación:

por redondeo es **66,4449**

por truncamiento es **66,4448**

2. Operaciones con decimales

Suma de números decimales

Para **sumar decimales** debes situarlos unos debajo de otros. Deben coincidir la coma decimal y también las unidades de igual orden.

Después suma como si se tratara de números naturales, y coloca la coma en el mismo lugar en que estaba. Veamos un ejemplo:

$$\begin{array}{rr} & 457{,}96 \\ & 231{,}7 \\ + & 145{,}051 \\ \hline & 834{,}711 \end{array}$$

Si en alguna posición no hay cifras, realiza la suma como si las cifras que faltan **fueran cero**.

Ejercicios: Calcula el valor de las siguientes **sumas** de números decimales:

a) 815,243 + 837,232

b) 606,215 + 541,157

c) 65,31 + 76,4

d) 727,148 + 76,078

Resta de números decimales

La **resta de decimales** también puedes hacerla situando un número encima del otro. Si en el minuendo hay menos cifras que en el sustraendo, puedes añadir ceros a la derecha del minuendo. También puedes operar directamente sin poner los ceros. Aquí tienes un ejemplo:

$$\begin{array}{rr} & 752{,}90 \\ - & 136{,}74 \\ \hline & 616{,}16 \end{array}$$

Recuerda que si en el minuendo **hay un cero**, deberás restar de 10.

Ejercicios: Calcula el valor de las siguientes **restas** de números decimales:

a) 528,405 – 430,410

b) 455,401 – 106,684

c) 605,002 – 55,464

d) 560,338 – 358,606

Multiplicación de números decimales

Para **multiplicar decimales** opera como si la coma decimal no estuviera. Cuando termines, pon la coma para que desde la derecha, el resultado tenga tantos decimales como la suma de los decimales de los factores que has multiplicado.

$$\begin{array}{rr} & 32{,}05 \\ \text{x} & 7{,}3 \\ \hline & 9615 \\ & 22435 \\ \hline & 233{,}965 \end{array}$$

Si no tienes cifras suficientes para poner la coma decimal, añade los ceros que hagan falta a la izquierda del resultado.

Ejercicio resuelto. Realiza la multiplicación: **9,308 · 2,31**

Quitamos la coma decimal y multiplicamos normalmente

9308 · 231 = 2150148

El primer número tiene 3 decimales y el segundo 2 decimales. El resultado tendrá 3 + 2 = 5 decimales. Por tanto:

9,308 · 2,31 = **21,501408**

Ejercicios: Multiplica:

a) 46,66 · 77,3

b) 6,261 · 5,36

c) 161,7 · 4,68

2. Operaciones con decimales

División de números decimales

Al **dividir decimales** debes distinguir dos casos:

Si sólo el **dividendo** tiene decimales, divide normalmente. Al llegar a la coma del dividendo, pon una coma en el cociente.

$$\begin{array}{r|l} 62{,}3 & 7 \\ \cline{2-2} 6\ 3 & 8{,}9 \\ 0 & \end{array}$$

Si el **divisor** y el **dividendo** tienen decimales, quita los decimales del divisor. Multiplica dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenía el divisor. Después actúa como en el caso anterior.

$$8{,}21 \,\underline{|\,2{,}3} \rightarrow \begin{array}{r|l} 82{,}1 & 23 \\ \cline{2-2} 13\ \ 1 & 3{,}5 \\ 1\ \ 6 & \end{array}$$

Ejercicio: Calcula el valor de las siguientes divisiones de números decimales:

a) 45,48:7,2 b) 99,46:2,2

Ejercicio resuelto:

Vamos a realizar la siguiente división

$$8{,}678 \,\underline{|\,7{,}2}$$

Antes de dividir corremos la coma un lugar hacia la derecha (hemos multiplicado dividendo y divisor por 10, que es la unidad seguida de tantos ceros como decimales tiene el divisor)

$$\begin{array}{r|l} 8{,}678 & 7{,}2 \\ \cline{2-2} 1\ 47 & 1{,}20 \\ 38 & \\ 38 & \end{array}$$

Al principio el dividendo tenía 3 decimales, luego el resto es 0,38

Ejercicios: Comprueba si los siguientes números son enteros, decimales exactos o decimales periódicos:

a) 738,555...
b) 5,59
c) 124,183183...
d) 10,75
e) 2305

Potencia de un número decimal

Para obtener la **potencia de un decimal** un primer camino es realizar directamente las multiplicaciones necesarias.

$$2{,}5^3=2{,}5\cdot 2{,}5\cdot 2{,}5=15{,}625$$

Pero si lo prefieres, también puedes operar sin decimales y añadirlos al final.

$$25^3=25\cdot 25\cdot 25=15625$$

El número inicial tenía 1 decimal. Su cubo tendrá 3·1=3 decimales, es decir 15,625.

> Si un número de **k** decimales lo elevas a **n** el resultado tendrá **k·n** decimales.

Ejercicios: Calcula las siguientes potencias:

a) $2{,}82^3$ b) $0{,}685^3$

¿Cuántos decimales tendrán las siguientes potencias? (Responde sin obtener el resultado)

c) $92{,}5^4$ d) $7{,}31^3$

Ejercicios resueltos:

a) Vamos a calcular **$0{,}989^2$**

Pasos:

Quitamos los decimales: **989^2**

Calculamos la potencia: **$989^2=978121$**

El resultado debe tener **3·2=6** decimales

Luego: **$0{,}989^2=0{,}978121$**

b) ¿Cuántos decimales tendrá la potencia siguiente? (Responde sin obtener el resultado) **$0{,}453^3$**

Como el número tiene 3 decimales, su cubo tendrá: **3 x 3 = 9** decimales

c) Vamos a calcular **$9{,}28^3$**

Pasos:

Quitamos los decimales: **928^3**

Calculamos la potencia: **$928^3=799178752$**

El resultado debe tener **2·3=6** decimales

Luego: **$9{,}28^3=799{,}178752$**

2. Operaciones con decimales

Raíz cuadrada de un número decimal

Puedes ayudarte de la calculadora para obtener la raíz cuadrada de un número decimal. Pero, ¿qué tal si ejercitamos el cálculo mental en algunos casos sencillos?

Por ejemplo, vamos a hallar la raíz cuadrada de 0,25. Si al resultado le llamamos **b**, buscamos **b** que cumpla **b2=0,25**.

Razonando como en el apartado anterior, **b** debe tener 1 decimal.Y sin decimales su cuadrado debe ser 25.

Está claro entonces que **b=0,5** (y -0,5).

La raíz cuadrada de un número de **2k** decimales tendrá **k** decimales.

Ejercicio: Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt{0{,}09}$ b) $\sqrt{0{,}0121}$

Ejercicios resueltos:

a) Vamos a calcular $\sqrt{0{,}64}$

Pasos:

0,64 tiene dos decimales, por lo tanto su raíz cuadrada tendrá 1 decimal

Como $8^2 = 64$, entonces

$\sqrt{0{,}64}$ = **0,8** (y también -**0,8**)

b) Vamos a calcular $\sqrt{0{,}0081}$

Pasos:

0,0081 tiene cuatro decimales, por lo tanto su raíz cuadrada tendrá 2 decimales

Como $9^2 = 81$, entonces

$\sqrt{0{,}0081}$ = **0,09** (y también -**0,09**)

3. Fracciones y números decimales

Paso de fracción a decimal

Para obtener el decimal correspondiente a una fracción, basta con hacer la división. Cuando la hagas, puede ocurrir que el resultado:

- No tenga decimales (**número entero**).
- Tenga una cantidad finita de decimales (**decimal exacto**).
- Tenga una cantidad infinita de decimales (**periódico puro** o **periódico mixto**).

Una fracción que da lugar a un decimal exacto se denomina **fracción decimal**. Si da lugar a un decimal periódico se llama **fracción ordinaria**.

Una **fracción decimal** irreducible sólo puede tener en el denominador los factores primos 2 y 5.

Ejercicio: Indica si las fracciones siguientes es un entero, un decimal exacto, un periódico puro o mixto:

a) $\frac{91}{200}$ b) $\frac{882}{14}$ c) $\frac{91}{660}$

Ejemplo del paso de fracción a un número decimal.

$\frac{91}{33}$. Si simplificamos los factores primos nunca son 2 y 5

$$\frac{91}{33} = \frac{13\cdot 7}{11\cdot 3}$$

tendremos un decimal periódico puro

$$\frac{91}{33} = 2{,}75757575\ldots$$

La fracción siguiente, ¿es un entero, un decimal exacto, un periódico puro o mixto?

$\frac{33}{18200}$. En el denominador de la fracción al descomponer en factores, aparecen los factores 2 y 5 junto a otros primos

$$\frac{33}{18200} = \frac{11\cdot 3}{2^3\cdot 5^2\cdot 13\cdot 7}$$

luego el resultado es un periódico mixto:

$$\frac{33}{18200} = 0{,}0018131868131868131868\ldots$$

3. Fracciones y números decimales

Fracción generatriz de decimales exactos

La **fracción generatriz** de un número decimal es una fracción cuyo resultado es ese número.

La fracción generatriz de un **decimal exacto** es muy sencilla: su numerador es el número sin decimales. Su denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenía el número decimal.

Y, si es posible, la fracción generatriz, se simplifica:

$$2{,}15 = \frac{215}{100} = \frac{43}{20}$$

> La fracción generatriz de un decimal exacto es una **fracción decimal**.

Ejercicio resuelto:

Calculemos la fracción generatriz de **67,2**

El numerador: el número **sin** decimales.

El denominador: la unidad seguida de tantos ceros como decimales tiene el número.

$$67{,}2 = \frac{672}{10}$$

Ejercicio: Calcula la fracción generatriz de los siguientes decimales exactos (simplifica siempre que sea posible):

a) 5,76
b) 0,252
c) 32,4

Fracción generatriz de decimales periódicos puros

Un número es **periódico puro** si tiene uno o más decimales que se repiten indefinidamente.

Parte entera

$$5{,}\underbrace{121212\ldots}_{\text{Parte periódica}} = 5{,}\underbrace{\widehat{12}}_{\text{Periodo}}$$

¿Cuál es su fracción generatriz? El numerador son las cifras hasta completar un periodo menos la parte entera. El denominador tantos 9 como cifras periódicas haya.

$$5{,}\widehat{12} = \frac{512-5}{99} = \frac{507}{99} = \frac{169}{33}$$

> La fracción generatriz de un periódico puro es una **fracción ordinaria**.

Ejercicio resuelto:

Calculemos la fracción generatriz de

27,74287428...

El numerador: resta del número hasta completar un periodo menos la parte entera.

El denominador: tantos 9 como cifras hay en un período

$$\frac{277428-27}{9999} = \frac{277401}{9999}$$

Ejercicio: Calcula la fracción generatriz de los siguientes decimales periódicos puros:

a) 98,691691...
b) 89,69176917...
c) 19,111...

Fracción generatriz de decimales periódicos mixtos

Un número es **periódico mixto** si tiene uno o más decimales seguidos de una parte periódica.

Parte entera — Anteperiodo

$$3{,}2\underbrace{484848\ldots}_{\text{Parte periódica}} = 3{,}2\underbrace{\widehat{48}}_{\text{Periodo}}$$

Su fracción generatriz es: **numerador**, las cifras hasta completar un periodo menos las cifras hasta el anteperiodo; **denominador**, tantos 9 como cifras periódicas y tantos 0 como cifras no periódicas haya.

$$3{,}2\widehat{48} = \frac{3248-32}{990} = \frac{3216}{990} = \frac{536}{165}$$

> La fracción generatriz de un periódico mixto es una **fracción ordinaria**.

Ejercicio resuelto:

Calculemos la fracción generatriz de

91,3444...

El numerador: resta del número hasta completar un periodo menos las cifras hasta el anteperiodo.

El denominador: tantos 9 como cifras periódicas y tantos 0 como no periódicas:

$$\frac{9134-913}{90} = \frac{8221}{90}$$

Ejercicio: Calcula la fracción generatriz de los siguientes decimales periódicos puros:

a) 26,8171717...
b) 0,8171717...
c) 8,91858585...

EJERCICIOS resueltos

Redondeo y truncamiento. Operaciones con decimales

1. Aproxima el número 83,259219645 con 4 cifras decimales mediante redondeo y truncamiento.

Para aproximar mediante **truncamiento** debes tomar los decimales que te pidan:

83,259219645 con cuatro decimales por truncamiento es **83,2592**.

Para aproximar mediante **redondeo**, debes fijarte en la primera cifra que vas a quitar. Si es mayor o igual a 5, añade 1 a la anterior, en caso contrario trunca el número:

83,259219645 con cuatro decimales por redondeo es **83,2592**.

2. Calcula la suma de los números 259,21 y 96,45.

Para sumar decimales colócalos de forma que las comas coincidan. Si quieres, puedes poner ceros en los lugares decimales vacíos, aunque no es obligatorio.

$$\begin{array}{r} 259{,}21 \\ \underline{+\ 96{,}45} \\ \mathbf{355{,}66} \end{array}$$

3. Calcula la resta de los números 561,95 y 45,22.

Para sumar decimales colócalos de forma que las comas coincidan. Si quieres, puedes poner ceros en los lugares decimales vacíos, pero intenta evitarlo.

$$\begin{array}{r} 561{,}95 \\ \underline{-\ 45{,}22} \\ \mathbf{512{,}73} \end{array}$$

4. Calcula el producto de los números de los números 51,46 y 5,99.

Para multiplicar decimales, primero haz la multiplicación sin los decimales:

5146 x 599 = 3082454. El resultado debe tener tantos decimales como la suma de los que tenían los factores (en este caso 2 + 2 = 4). Así, la solución es:

51,46 x 5,99 = **308,2454**

5. Indica el resto y el cociente de dividir 62,92 entre 9,4.

Para dividir decimales, si es necesario, quita los decimales del divisor, para ello, multiplica el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como tenía el divisor:

629,2: 94

Se divide y resulta de cociente: 6,6 y de resto 8,8. Debemos ajustar los decimales del resto, corriendo en este caso, la coma un lugar hacia la izquierda.

Solución: El cociente es: **6,6** El resto es: **0,88**

EJERCICIOS resueltos

Redondeo y truncamiento. Operaciones con decimales

6. ¿Cuántos decimales tendrá la potencia $55{,}61^6$?

Recuerda que si tienes un número de **k** decimales, y lo elevas a una potencia de grado **n**, el resultado será un número decimal que tendrá **k·n** decimales.

En este caso, el número de decimales de la base es 2, y el exponente es 6, luego la potencia es un número que tiene 2·6=12 decimales.

7. Intenta obtener mentalmente $\sqrt{0{,}0000000144}$.

En algunos casos es posible hallar mentalmente el valor de una raíz.

La raíz cuadrada de un número tendrá la mitad de sus decimales. El número que buscamos tiene **5** decimales.

Hallamos la raíz de 144 que es 12. Por tanto las raíces son **0,00012** y **-0,00012**.

Fracción generatriz de un número decimal

8. Estudia si la fracción $\frac{39}{20}$ da como resultado un decimal exacto, un periódico puro o un periódico mixto.

Primero debemos simplificar la fracción hasta que sea irreducible. Después factoriza el **denominador**

- Si los únicos factores que tiene son 2 y 5 es un decimal exacto.
- Si sólo tiene factores distintos a 2 y 5 el número es periódico puro.
- Si sus factores incluyen a 2 o a 5 y a otros factores, el número es periódico mixto.

En nuestro caso $\frac{39}{20} = \frac{3\cdot 13}{2^2\cdot 5}$. Se trata de un **decimal exacto.** El resultado es **1,95.**

9. Halla la fracción generatriz del número 0,077.

Este número es un **decimal exacto**. Así, en el numerador de la fracción ponemos el número **sin** decimales. En el denominador ponemos la unidad seguida de tantos ceros como decimales tiene el número. Luego

$$0{,}077 = \frac{77}{1000}$$

10. Halla la fracción generatriz del número 69,777...

Este número es un decimal **periódico puro**. Para calcular la fracción generatriz, tenemos en cuenta que: en el numerador ponemos la resta del número hasta completar un periodo menos la parte entera. Y en el denominador: tantos 9 como cifras hay en un período

$$\frac{697-69}{9} = \frac{628}{9}$$

EJERCICIOS resueltos

Fracción generatriz de un número decimal

11. Halla la fracción generatriz del número 37,37555...

Este número es un decimal **periódico mixto.** Para calcular la fracción generatriz, tenemos en cuenta que: en el numerador ponemos la resta del número hasta completar un periodo menos las cifras hasta el anteperíodo. Y en el denominador: tantos 9 como cifras periódicas y tantos 0 como no periódicas:

$$\frac{37375-3737}{900}=\frac{33638}{900}=\frac{16819}{450}$$

Problemas en los que intervienen números decimales

12. Si compramos un artículo cuyo precio es 645,37 € y para pagarlo entregamos 653 €, ¿cuánto nos devolverán?

Recuerda *que la moneda más pequeña en euros es el céntimo.*

¡¡No te equivoques: 2,5 € = 2 € y 50 céntimos   2,05€ = 2 € y 5 céntimos!!

Solución: Para calcular el cambio restamos las dos cantidades

653 - 645,37 = **7,63 €**

13. Halla el área de un rectángulo de base 4,4 cm y altura 1,3 cm. Expresa la solución con un único decimal redondeado.

Recuerda *que el área de un rectángulo es el producto de su base por su altura.*

Para expresar la aproximación de un decimal puedes emplear el signo ≅ que se lee aproximadamente igual. Por ejemplo, 4,53 ≅ 4,5.

Solución: **Área =** $4{,}4 \cdot 1{,}3 = 5{,}72 \cong \mathbf{5{,}8}\ \text{cm}^2$

14. Un cable mide 10,1 m y su precio es de 14,14 €. ¿Cuánto vale 1 m de cable?

*Imagina que sabes el **precio unitario** de un artículo y quieres calcular el **precio total** de una cierta **cantidad** de producto. Para hallarlo multiplicarías ambas cantidades:*

Precio Total = Precio unitario · Cantidad

*Para obtener entonces el **precio unitario** basta con despejar*

$$\text{Precio unitario}=\frac{\text{Precio total}}{\text{Cantidad}}.$$

Solución: Para obtener el precio de un metro de cable, dividimos el pecio total por la longitud del cable

$$\text{Precio por metro} = \frac{14{,}14}{10{,}1} = \mathbf{1{,}4\ €} \text{ el metro}$$

Para practicar

Redondeo y truncamiento

1. Aproxima con 4 cifras decimales mediante redondeo y truncamiento:

a) 58,271314153 b) 1,7634256

c) 2,237653897 c) 5,8761233

Suma de decimales

2. Calcula las sumas siguientes:

a) 27,131 + 4,153 b) 9315,7 + 3,231

c) 91,736 + 77,42 d) 144,96 + 9,951

Resta de decimales

3. Calcula las siguientes restas:

a) 196,44 - 5,991 b) 69,421 - 3,566

c) 6831,6 – 8,884 d) 49,698 – 3,171

Multiplicación de decimales

4. Calcula los siguientes productos:

a) 638,8 · 0,618 b) 29,43 · 0,264

c) 27,28 · 4,23 d) 713,2 · 0,862

División de decimales

5. Indica el resto y el cociente al dividir:

a) 2,221 : 6,3 b) 8,719 : 6,6

c) 52,48 : 82 d) 66,62: 59

Potencia de decimales

6. Calcula las siguientes potencias:

a) $44{,}65^3$ b) $1{,}857^5$

c) $34{,}61^4$ d) $6{,}348^3$

Raíz de un decimal

7. Halla el resultado de las siguientes raíces. Da las dos soluciones posibles:

a) $\sqrt{0{,}000121}$ b) $\sqrt{0{,}000064}$

c) $\sqrt{0{,}00000016}$ d) $\sqrt{0{,}00000036}$

Paso de fracción a decimal

8. Estudia si las siguientes fracciones dan como resultado un decimal exacto, un periódico puro o un periódico mixto:

a) $\frac{39}{77}$ b) $\frac{77}{250}$

c) $\frac{91}{33}$ d) $\frac{91}{1650}$

Fracción generatriz

8. Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales exactos:

a) 9,1 b) 0,077

c) 3,3 d) 0,61

9. Halla la fracción generatriz de los siguientes números periódicos puros:

a) 22,333... b) 22,5353...

c) 21,275275... d) 44,527527...

10. Halla la fracción generatriz de los siguientes números periódicos mixtos:

a) 38,72777... b) 62,2777...

c) 54,275757... d) 27,33535...

Problemas

11. Si compramos un artículo cuyo precio es 1548,16 € y para pagarlo entregamos 1566 €, ¿cuánto nos devolverán?

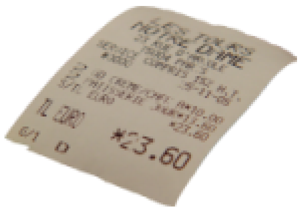
12. Halla el área de un rectángulo de base 4,9 cm. y altura 9,2 cm. Expresa la solución con un único decimal redondeado.

13. Un cable mide 8,1 m y su precio es de 10,53 €. ¿Cuánto vale 1 m de cable?

Para saber más

La Ley de Benford

A diario ves muchos números, decimales o no. Piensa en los precios, números de viviendas, medidas de longitud, capacidad, peso...

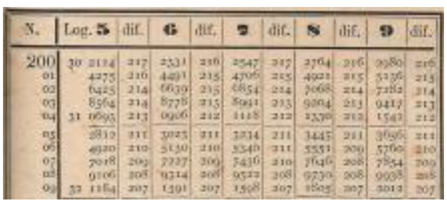


Cuando encontramos un número, ¿es igualmente probable que comience por 1 que por 3 ó 5. Pues curiosamente, y al contrario de lo que cabría pensar, no.

Antes de la aparición de las calculadoras y ordenadores para hacer cálculos era habitual recurrir a las llamadas tablas de **logaritmos**.

El matemático y astrónomo **Simon Newcomb** ya había hecho notar en 1881 que las páginas iniciales de los libros con tablas de logaritmos estaban mucho más gastadas que el resto.

Del estudio de estas tablas se concluía que los números que empezaban por uno eran consultados con mayor frecuencia.



En 1938, el físico Frank Benford observó el mismo fenómeno, también en las tablas de logartimos, y enunció una ley que nos permite calcular la probabilidad de que un número comience por una cierta cifra.

La **Ley de Benford** nos permite hallar la probabilidad de que un número comience por una cierta cifra. Fue demostrada por un matemático, Theodore P. Hill, en 1996.

Cifra de comienzo	Probabilidad (%)
1	30,1 %
2	17,6 %
3	12,5 %
4	9,7 %
5	7,9 %
6	6,7 %
7	5,8 %
8	5,1 %
9	4,6 %

Como ves, cuanto mayor es el dígito inicial, más difícil será que encontremos ese número en la vida diaria.

Puedes consultar en la wikipedia los siguientes enlaces:

logaritmos
http://es.wikipedia.org/wiki/Logaritmo

Simon Newcomb
http://es.wikipedia.org/wiki/Simon_Newcomb

Ley de Benford
http://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Benford

Recuerda lo más importante

¿Qué partes tiene un número decimal?

Tiene una parte **entera** y otra **decimal**, separadas por la **coma decimal**. Un número decimal puede ser:

- **Decimal exacto**. Posee una cantidad limitada de decimales: **45,128**.
- **Periódico puro**. Un grupo de decimales se repite indefinidamente, el **periodo**: **4,8585...**
- **Periódico mixto**. Tiene uno o más decimales seguidos de un periodo: **4,21777...**

¿Cómo se trunca o redondea un decimal?

Para **truncar** quédate con los decimales que necesites y desprecia el resto:

8,4768 se trunca como **8,47** a dos decimales.

Para **redondear** fíjate en la primera cifra decimal eliminada. Si es 5 o más, aumenta una unidad la cifra anterior. Si es menor que 5 déjala igual.

8,4768 se redondearía a **8,48**. En cambio **8,4738** lo haría a **8,47**.

¿Cómo se suman y restan decimales?

Sitúa los decimales para que coincida la coma decimal. Después suma o resta tal y como lo harías normalmente. Al llegar al lugar de la coma escribe una coma en el resultado.

$$\begin{array}{r} 264{,}79 \\ +\ 341{,}04 \\ \hline 605{,}83 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 635{,}81 \\ -\ 218{,}24 \\ \hline 417{,}57 \end{array}$$

¿Cómo se multiplican decimales?

Multiplica sin incluir los decimales. El resultado del producto tendrá tantos decimales como la **suma** de los decimales que tenían los números que inicialmente multiplicaste.

$$\begin{array}{r} 126{,}34 \\ \times \quad 2{,}9 \\ \hline 113706 \\ 25268 \\ \hline 366{,}386 \end{array}$$

Cómo se dividen decimales?

Prepara la división para que sólo el dividendo tenga decimales. Al llegar a la coma del dividendo, pon una coma en el cociente.

$$\begin{array}{r|l} 132{,}5 & 32 \\ \cline{2-2} 4\ 5 & 4{,}1 \\ 1\ 3 & \text{R}=1{,}3 \end{array}$$

¿Cómo se obtiene la fracción generatriz de un decimal?

Decimal exacto $1{,}3 = \frac{13}{10}$

Periódico puro $6{,}\widehat{23} = \frac{623-6}{99} = \frac{617}{99}$

Periódico mixto $1{,}1\hat{4} = \frac{114-11}{90} = \frac{103}{90}$

Autoevaluación

1. Halla la aproximación de 0,63718122 a 2 decimales mediante redondeo y truncamiento

2. Halla la suma de 63,718 y 91,22.

3. Calcula. La diferencia entre 21,873 y 29,16.

4. Calcula el producto de 3,821 y 2,79

5. Indica el cociente y el resto de dividir 16,91 entre 7,2

6. ¿Cuántos decimales tendrá la potencia $23{,}18^5$?.

7. Halla la fracción generatriz simplificada de 0,077.

8. Halla la fracción generatriz simplificada de 64,6868...

9. Halla la fracción generatriz simplificada de 64,84242...

10. Halla el área de un rectángulo de base 5,7 cm. Y de altura 6,8 cm. Expresa la solución con un único decimal redondeado.

Soluciones de los ejercicios propuestos en los Contenidos

Elementos de un número decimal

a) Periódico puro.

b) Decimal exacto.

c) Periódico mixto

d) Decimal exacto

e) Número entero

Redondeo y truncamiento de un número decimal

a) Redondeo: 60,62 y truncamiento: 60,61.

b) Redondeo: 36,47 y truncamiento: 36,47.

Suma de números decimales

a) 1652,475

b) 1147,372

c) 141,71

d) 803,226

Resta de números decimales

a) 97,995

b) 348,717

c) 549,538

d) 201,732

Multiplicación de números decimales

a) 3606,818

b) 33,55896

c) 756,756

División de números decimales

a) Cociente: 6,3 Resto: 0,12

b) Cociente:45,2 Resto: 0,02

Potencia de un número decimal

a) 22,425768

b) 0,321419125

c) 4 decimales

d) 6 decimales

Raíz cuadrada de un número decimal

a) 0,3 y -0,3

b) 0,11 y -0,11

Paso de fracción a decimal

a) 0,455, es un decimal exacto

b) 63, es un número entero

c) 0,1378378378... es un periódico mixto

Fracción generatriz de decimales exactos

a) $\frac{144}{25}$

b) $\frac{63}{250}$

c) $\frac{162}{5}$

Fracción generatriz de decimales periódicos puros

a) $\frac{98593}{999}$

b) $\frac{896828}{9999}$

c) $\frac{172}{9}$

Fracción generatriz de decimales periódicos mixtos

a) $\frac{26549}{990}$

b) $\frac{889}{990}$

c) $\frac{44147}{4950}$

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. Redondeo y truncamiento de un número decimal

a) Redondeo y truncamiento: 58,2713.

b) Redondeo y truncamiento: 1,7634.

c) Redondeo: 2,2377 y truncamiento: 2,2376

d) Redondeo y truncamiento: 5,8761

2. Suma de números decimales

a) 31,284 b) 9318,931

c) 169,156 d) 154,911

3. Resta de números decimales

a) 190,449 b) 65,855

c) 6822,716 d) 46,527

4. Multiplicación de números decimales

a) 394,7784 b) 7,76952

c) 115,3944 d) 614,7784

5. División de números decimales

a) Cociente: 0,35 Resto: 0,016

b) Cociente: 1,32 Resto: 0,007

c) Cociente: 0,64 Resto: 0

d) Cociente: 1,12 Resto: 0,54

6. Potencia de un número decimal

a) 89015,244625

b) 22,0830735389

c) 1434849,653474

d) 255,806016192

7. Raíz cuadrada de un número decimal

a) 0,011 y -0,011

b) 0,008 y -0,008

c) 0,0004 y -0,0004

d) 0,0006 y -0,0006

8. Paso de fracción a decimal

a) Periódico puro: 0,506493506493…

b) Decimal exacto: 0,308

c) Periódico puro: 2,757575…

d) Periódico mixto: 0,05515151…

9. Fracción generatriz de decimales exactos

a) $\frac{91}{10}$ b) $\frac{77}{1000}$

c) $\frac{33}{10}$ d) $\frac{61}{100}$

10. Fracción generatriz de decimales periódicos puros

a) $\frac{67}{3}$ b) $\frac{2231}{99}$

c) $\frac{21254}{999}$ d) $\frac{44483}{999}$

11. Fracción generatriz de decimales periódicos mixtos

a) $\frac{6971}{180}$ b) $\frac{1121}{18}$

c) $\frac{17911}{330}$ d) $\frac{13531}{495}$

12. 17,84 €

13. El área tiene 45,1 cm^2.

14. 1,3 € el metro.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. Redondeo: 0,64 Truncamiento: 0,63.

2. 154,938.

3.-7,287.

4.10,66059.

5. Cociente: 2,3 Resto: 0,35

6. 10 decimales.

7. $\frac{77}{100}$.

8. $\frac{6404}{99}$.

9. $\frac{10699}{165}$.

10. 38,8 cm^2.

No olvides enviar las actividades al tutor

4

Proporcionalidad

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Distinguir entre magnitudes directa e inversamente proporcionales.
- Resolver distintas situaciones sobre proporcionalidad directa e inversa con dos o más magnitudes.
- Hacer repartos directa e inversamente proporcionales.
- Calcular porcentajes.
- Calcular directamente aumentos y disminuciones porcentuales.
- Resolver distintos ejercicios sobre porcentajes.

Antes de empezar


Elaborar una receta de cocina es una actividad de magnitudes directamente proporcionales


Calcular el precio de una excursión es una actividad de magnitudes inversamente proporcionales


Planificar un trabajo para acabarlo a tiempo es una actividad de proporcionalidad compuesta


Repartir los beneficios de un trabajo entre los realizadores es un reparto directamente proporcional

Repartir dinero entre personas según sus necesidades es un reparto inversamente proporcional


Para medir la capacidad de un pantano o de un depósito se utilizan porcentajes


Para calcular la subida salarial de los trabajadores se aplica un aumento porcentual


Las rebajas en supermercados y comercios se calculan aplicando una disminución porcentual


Las variaciones en el precio de la vivienda se expresan también mediante porcentajes

Algunas aplicaciones: ofertas de supermercados

Continuamente vemos distintas ofertas en supermercados y comercios que intentan atraer la atención del consumidor:

- Llévese 3 y pague 2.
- La segunda unidad a mitad de precio.
- Cuatro por el precio de tres.
- 15% de descuento en todos los productos.

En esta unidad obtendrás los conocimientos necesarios para saber la que más te interesa.

1. Proporción numérica

Razón entre dos números

Recordando lo visto en el curso anterior, una **razón** entre dos números a y b es el cociente entre a y b.

$$\textbf{Razón entre a y b} = \frac{a}{b}.$$

En mi clase hay 18 chicas y 12 chicos. ¿Cuál es la razón entre chicas y chicos? ¿Y entre chicos y chicas?

Razón entre chicas y chicos

$$\frac{\text{chicas}}{\text{chicos}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Por cada tres chicas hay dos chicos.

Razón entre chicos y chicas

$$\frac{\text{chicos}}{\text{chicas}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Por cada dos chicos hay tres chicos.

Proporción numérica

Una proporción numérica es una igualdad entre dos razones numéricas.

En cualquier proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

a y d se llaman **extremos**, b y c **medios**.

La siguiente tabla indica la cantidad de agua registrada en dos ciudades A y B, en un año completo y en un mes. Comparar las razones del agua del mes de enero y de todo el año.

	Año	Enero
Ciudad A	1200	150
Ciudad B	480	80

Ciudad A: $\frac{\text{enero}}{\text{año}} = \frac{150}{1200} = \frac{1}{8}$

Ciudad B: $\frac{\text{enero}}{\text{año}} = \frac{80}{480} = \frac{1}{6}$

Las razones obtenidas para ambas ciudades son distintas, por tanto la expresión:

$$\frac{150}{1200} = \frac{80}{480}$$

no es una proporción.

No es se verifica que:

$$150 \cdot 480 = 1200 \cdot 80$$

$$72000 \neq 96000$$

EJERCICIOS resueltos

1. Un equipo ha marcado 68 goles y ha encajado 44. ¿Cuál es la razón entre las dos cantidades?

Razón entre goles marcados y goles encajados: $\frac{68}{44} = \frac{17}{11} = 1,55$

Razón entre goles encajados y goles marcados: $\frac{44}{68} = \frac{11}{17} = 0,65$

2. Calcular el valor de "x" para que las cantidades de agua registradas en un año completo y en un mes en ambas ciudades sean proporcionales.

	Año	Enero
Ciudad A	x	150
Ciudad B	480	80

$$\frac{150}{x} = \frac{80}{480} \Rightarrow 150 \cdot 480 = 80 \cdot x \Rightarrow x = \frac{150 \cdot 480}{80} = 900$$

3. Calcular el valor de "x" para que las cantidades de agua registradas en un año completo y en un mes en ambas ciudades sean proporcionales.

	Año	Enero
Ciudad A	1200	x
Ciudad B	480	80

$$\frac{x}{1200} = \frac{80}{480} \Rightarrow x \cdot 480 = 1200 \cdot 80 \Rightarrow x = \frac{1200 \cdot 80}{480} = 200$$

4. Calcular el valor de "x" para que las cantidades de agua registradas en un año completo y en un mes en ambas ciudades sean proporcionales.

	Año	Enero
Ciudad A	1200	150
Ciudad B	x	80

$$\frac{150}{1200} = \frac{80}{x} \Rightarrow 150 \cdot x = 1200 \cdot 80 \Rightarrow x = \frac{1200 \cdot 80}{150} = 640$$

5. Calcular el valor de "x" para que las cantidades de agua registradas en un año completo y en un mes en ambas ciudades sean proporcionales.

	Año	Enero
Ciudad A	1200	150
Ciudad B	480	x

$$\frac{150}{1200} = \frac{x}{480} \Rightarrow 150 \cdot 480 = 1200 \cdot x \Rightarrow x = \frac{150 \cdot 480}{1200} = 60$$

2. Proporcionalidad directa

Constante de proporcionalidad

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

Si a un valor m_1 de la primera magnitud le corresponde un valor m_2 de la segunda magnitud, se puede comprobar que el cociente o razón entre estos dos valores es siempre constante. A esta cantidad se le llama **constante o razón de proporcionalidad directa**.

Razón de proporcionalidad: $r = \frac{m_2}{m_1}$.

Si 1 kilogramo de manzanas vale 1,80 euros, ¿cuál será el precio de la compra según el peso?

Número de kilos	Precio	Razón de proporcional.
1	1,80	1,80/1=**1,80**
2	3,60	3,60/2=**1,80**
3	5,40	5,40/3=**1,80**
4	7,20	7,20/4=**1,80**
5	9,00	9,00/5=**1,80**

Al dividir cualquier valor de la segunda magnitud por el valor de la primera magnitud se obtiene el mismo cociente.

Regla de tres directa

Una forma muy fácil de resolver una actividad de proporcionalidad directa es un procedimiento llamado **regla de tres**.

Consiste en aprovechar la razón o constante de proporcionalidad directa para calcular el cuarto término.

Si 8 kilos de manzanas valen 10,40 euros, ¿cuánto costarán 13 kilos?

Regla de tres directa

1ª magnitud Nº kilos		**2ª magnitud** euros
8	----------	**10,40**
13	----------	**x**

$$\frac{10,40}{8} = \frac{x}{13} \Rightarrow x = \frac{10,40 \cdot 13}{8} = 16,90$$

Solución: **16.90 euros**.

Reducción a la unidad

Sin embargo la regla de tres se convierte en un procedimiento mecánico, que aunque permite resolver de forma fácil cualquier actividad, no se razona de forma conveniente su resolución.

Otro procedimiento que podemos llamar de **reducción a la unidad**, consiste en calcular el valor de la segunda magnitud correspondiente a la unidad de la primera. Este valor es el que se ha llamado anteriormente constante de proporcionalidad directa. A partir de aquí es más fácil calcular el valor final de la segunda magnitud.

Si 8 kilos de manzanas valen 10,40 euros, ¿cuánto costarán 13 kilos?

Reducción a la unidad

1ª magnitud Nº kilos		**2ª magnitud** euros
8	---------	**10,40**
↓ **: 8**		↓ **: 8**
1	----------	**1,30**
↓ **x 13**		↓ **x 13**
13	----------	**16,90**

Solución: **16.90 euros**.

EJERCICIOS resueltos

6. Un coche ha dado 60 vueltas a un circuito en 105 minutos. Calcula el tiempo que tardará en recorrer en el mismo circuito 40 vueltas.

Regla de tres directa

1ª magnitud Nº vueltas		2ª magnitud minutos
60	----------	105
40	----------	x

$$\frac{105}{60} = \frac{x}{40} \Rightarrow x = \frac{105 \cdot 40}{60} = 70$$

Solución: 70 minutos.

Reducción a la unidad

1ª magnitud Nº vueltas		2ª magnitud minutos
60	---------	105
↓ : 60		↓ : 60
1	----------	1,75
↓ x 40		↓ x 40
40	----------	70

Solución: 16.90 euros.

7. Si 12 bolas de acero iguales tienen un peso de 7200 gramos, ¿cuánto pesarán 50 bolas iguales a las anteriores?

Regla de tres directa

1ª magnitud Nº bolas		2ª magnitud gramos
12	----------	7200
50	----------	x

$$\frac{7200}{12} = \frac{x}{50} \Rightarrow x = \frac{7200 \cdot 50}{12} = 30000$$

Solución: 30000 gramos = 30 kg.

Reducción a la unidad

1ª magnitud Nº bolas		2ª magnitud gramos
12	---------	7200
↓ : 12		↓ : 12
1	----------	600
↓ x 50		↓ x 50
50	----------	30000

Solución: 30000 gramos = 30 kg.

8. A cierta hora del día un palo de 1,5 metros de largo proyecta una sombra de 60 centímetros. ¿Cuánto mide un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 2,40 metros?

Regla de tres directa

1ª magnitud sombra m.		2ª magnitud altura m.
0,60	----------	1,5
2,40	----------	x

$$\frac{1,5}{0,60} = \frac{x}{2,40} \Rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 2,40}{0,60} = 6$$

Solución: 6 metros.

Reducción a la unidad

1ª magnitud sombra m.		2ª magnitud altura m.
0,60	---------	1,5
↓ : 0,60		↓ : 0,60
1	----------	2,5
↓ x 2,40		↓ x 2,40
2,40	----------	6

Solución: 6 metros.

3. Proporcionalidad inversa

Constante de proporcionalidad

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número.

Si a un valor m_1 de la primera magnitud le corresponde un valor m_2 de la segunda magnitud, se puede comprobar que el producto de estos dos valores es siempre constante. A este producto se le llama **constante de proporcionalidad inversa**.

Razón de proporcionalidad: $m_1 \cdot m_2$.

Una alumna compra un regalo de 72 euros para una compañera de la clase. ¿Cuánto tendrán que pagar según el número de compañeros que participen?

Núm. de personas	Precio	Constante de proporcional.
1	72	1·72=**72**
2	36	2·36=**72**
3	24	3·24=**72**
4	18	4·18=**72**
5	14,40	5·14,40=**72**

Al multiplicar los valores correspondientes a las dos magnitudes se obtiene se obtiene el mismo producto.

Regla de tres inversa

Una forma muy fácil de resolver una actividad de proporcionalidad inversa es un procedimiento llamado regla de tres.

Consiste en aprovechar la constante de proporcionalidad inversa para calcular el cuarto término.

18 alumnos han pagado 6 euros cada uno para comprar un regalo a una compañera, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno si al final participan 24 alumnos?

Regla de tres directa

1ª magnitud Nº personas		**2ª magnitud** euros
18	----------	**6**
24	----------	**x**

$$18 \cdot 6 = 24 \cdot x \Rightarrow x = \frac{18 \cdot 6}{24} = 4,50$$

Solución: **16,90 euros**.

Reducción a la unidad

Sin embargo la regla de tres se convierte en un procedimiento mecánico, que aunque permite resolver de forma fácil cualquier actividad, no se razona de forma conveniente su resolución.

Otro procedimiento que podemos llamar de reducción a la unidad, consiste en calcular el valor de la segunda magnitud correspondiente a la unidad de la primera. Este valor es el que se ha llamado anteriormente constante de proporcionalidad inversa. A partir de aquí es más fácil calcular el valor final de la segunda magnitud.

18 alumnos han pagado 6 euros cada uno para comprar un regalo a una compañera, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno si al final participan 24 alumnos?

Reducción a la unidad

1ª magnitud Nº personas		**2ª magnitud** euros
18	----------	**6**
↓ **: 18**		↓ **x 18**
1	----------	**108**
↓ **x 24**		↓ **: 24**
24	----------	**4,50**

Solución: **16,90 euros**.

EJERCICIOS resueltos

9. Un coche circulando a 90 km/h ha tardado 12 horas en realizar un viaje. ¿Cuánto tiempo tardará en el mismo trayecto a una velocidad de 80 km/h?

Regla de tres inversa

1ª magnitud Km/h		2ª magnitud horas
90	----------	12
80	----------	x

$$90 \cdot 12 = 80 \cdot x \Rightarrow x = \frac{90 \cdot 12}{80} = 13{,}5$$

Solución: 13,5 horas.

Reducción a la unidad

1ª magnitud Km/h		2ª magnitud horas
90	---------	12
↓ : 90		↓ x 90
1	----------	1080
↓ x 80		↓ : 80
80	----------	13,5

Solución: 13,5 horas.

10. 6 fotocopiadoras tardan 6 horas en realizar un gran número de copias, ¿cuánto tiempo tardarían 4 fotocopiadoras en realizar el mismo trabajo?

Regla de tres inversa

1ª magnitud fotocopiadoras		2ª magnitud horas
6	----------	6
4	----------	x

$$6 \cdot 6 = 4 \cdot x \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 6}{4} = 9$$

Solución: 9 horas.

Reducción a la unidad

1ª magnitud fotocopiadoras		2ª magnitud horas
6	----------	6
↓ : 6		↓ x 6
1	-----------	36
↓ x 4		↓ : 80
4	-----------	9

Solución: 9 horas.

11. Al repartir una cantidad de euros entre 7 personas cada una recibe 12 euros. ¿Cuánto recibirían si el reparto se hiciera entre 6 personas?

Regla de tres inversa

1ª magnitud personas		2ª magnitud euros
7	----------	12
6	----------	x

$$7 \cdot 12 = 6 \cdot x \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 12}{6} = 14$$

Solución: 14 euros.

Reducción a la unidad

1ª magnitud personas		2ª magnitud euros
7	----------	12
↓ : 7		↓ x 7
1	----------	84
↓ x 6		↓ : 6
6	----------	14

Solución: 14 euros.

4. Proporcionalidad compuesta

Proporcionalidad compuesta

Una actividad de proporcionalidad compuesta relaciona más de dos magnitudes que pueden ser directa o inversamente proporcionales.

Para resolver una actividad de proporcionalidad compuesta se hace de forma ordenada con el procedimiento de reducción a la unidad.

Procedimiento de resolución:

En primer lugar se deja fija la segunda magnitud y se relaciona la primera con la tercera.

En segundo lugar se deja fija la primera magnitud y se relaciona la segunda con la tercera.

Tres motores iguales funcionando 6 horas necesitan 9000 litros de agua para refrigerarse. ¿Cuántos litros de agua necesitarán 5 motores funcionando 8 horas?

1ª magnitud motores	**2ª magnitud** horas	**3ª magnitud** litros
3	**6**	**9000**
↓ **: 3**	↓	↓ **: 3**
1	**6**	**3000**
↓ **x 5**	↓	↓ **x 5**
5	**6**	**15000**
↓	↓ **: 6**	↓ **: 6**
5	**1**	**2500**
↓	↓ **x 8**	↓ **x 8**
5	**8**	**20000**

Solución: **20000 litros de agua**.

1ª magnitud: número de motores.
2ª magnitud: número de horas.
3ª magnitud: número de litros.

Se deja fija la segunda magnitud.

La primera y la tercera magnitud son directamente proporcionales. Más motores necesitarán más litros de agua para refrigerarse.

Se deja fija la primera magnitud.

La segunda y la tercera magnitud son directamente proporcionales. Si funcionan durante más horas necesitarán más litros de agua para refrigerarse.

Tres obreros trabajando 8 horas diarias realizan un trabajo en 15 días. ¿Cuántos días tardarán en hacer el trabajo 5 obreros trabajando 9 horas?

1ª magnitud obreros	**2ª magnitud** horas	**3ª magnitud** días
3	**8**	**15**
↓ **: 3**	↓	↓ **x 3**
1	**8**	**45**
↓ **x 5**	↓	↓ **: 5**
5	**8**	**9**
↓	↓ **: 8**	↓ **x 8**
5	**1**	**72**
↓	↓ **x 9**	↓ **: 9**
5	**9**	**8**

Solución: **8 días**.

1ª magnitud: número de obreros.
2ª magnitud: número de horas.
3ª magnitud: número de días.

Se deja fija la segunda magnitud.

La primera y la tercera magnitud son inversamente proporcionales. Más obreros tardarán menos días en realizar el trabajo.

Se deja fija la primera magnitud.

La segunda y la tercera magnitud son inversamente proporcionales. Si trabajan más horas diarias tardarán menos días en realizar el trabajo.

EJERCICIOS resueltos

12. Tres grifos llenan un depósito de 10 m^3 en 5 horas. ¿Cuánto tardarán en llenar un depósito de 8 m^3 dos grifos iguales a los anteriores?

La primera y la tercera magnitud son inversamente proporcionales. Más grifos tardarán menos tiempo en llenar el depósito.

La segunda y la tercera magnitud son directamente proporcionales. Si el depósito es más grande se tardará más tempo en llenarlo.

1ª magnitud grifos		2ª magnitud metros cúbicos		3ª magnitud horas
3	-----------	10	------------	5
↓ : 3		↓		↓ x 3
1	------------	10	------------	15
↓ x 2		↓		↓ : 2
2	------------	10	------------	7,5
↓		↓ : 10		↓ : 10
2	------------	1	------------	0,75
↓		↓ x 8		↓ x 8
2	------------	8	------------	6

Solución: 6 horas.

13. Con 12 kilos de pienso 9 conejos comen durante 6 días. ¿Cuántos días tardarán 4 conejos en comerse 8 kilos de pienso?

La primera y la tercera magnitud son directamente proporcionales. Más kilos de pienso supone alimento para más días.

La segunda y la tercera magnitud son inversamente proporcionales. Más conejos comiendo tardarán menos días en comerse el pienso.

1ª magnitud Kilos de pienso		2ª magnitud conejos		3ª magnitud días
12	------------	9	------------	6
↓ : 12		↓		↓ : 12
1	------------	9	------------	0,5
↓ x 8		↓		↓ x 8
8	------------	9	------------	6
↓		↓ : 9		↓ x 9
8	------------	1	------------	36
↓		↓ x 4		↓ : 4
8	------------	4	------------	9

Solución: 9 días.

5. Repartos proporcionales

Directamente proporcionales

Se va a repartir una cantidad en varias partes con unas condiciones determinadas.

Cada una de las partes debe recibir una cantidad directamente proporcional a unos valores iniciales.

A mayor valor inicial de una parte le corresponderá mayor cantidad en el reparto.

1. En primer lugar hay que sumar los valores iniciales de cada una de las partes.

2. A continuación se divide la cantidad a repartir entre la suma obtenida.

3. Por último se multiplica el cociente obtenido por los valores iniciales de cada una de las partes.

Dos amigas juntan 1,20 y 1,80 euros que tenían para comprar un paquete de pegatinas de una serie de dibujos animados. El paquete contiene 120 pegatinas. ¿Cómo deben repartírselas de forma justa?

1. Se suman los valores iniciales:

$$1{,}20 + 1{,}80 = 3$$

2. Se divide 120 entre 3

$$120 : 3 = 40$$

3. Se multiplican los valores iniciales por 40.

$1{,}20 \cdot 40 =$ **48 pegatinas**
$1{,}80 \cdot 40 =$ **72 pegatinas**

Comprobación:

$$48 + 72 = 120$$

Inversamente proporcionales

Se va a repartir una cantidad en varias partes con unas condiciones determinadas.

Cada una de las partes debe recibir una cantidad inversamente proporcional a unos valores iniciales.

A mayor valor inicial de una parte le corresponderá menor cantidad en el reparto.

Hacer un reparto inversamente proporcional a unos valores iniciales es igual que hacer un reparto directamente proporcional a los inversos de dichos valores iniciales.

1. En primer lugar se calculan los inversos de los valores iniciales de cada una de las partes.

2. Después hay que sumar los inversos de los valores iniciales que se han calculado.

3. A continuación se divide la cantidad a repartir entre la suma obtenida.

4. Por último se multiplica el cociente obtenido por los inversos de los valores iniciales de cada una de las partes.

Los dos camareros de un bar se reparten un bote con 136 euros de propina de forma inversamente proporcional al número de días que han faltado, que ha sido respectivamente 3 y 5 días. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

1. Se suman los inversos de los valores iniciales:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$

2. Se divide 136 entre 8/15

$$136 : \frac{8}{15} = \frac{2040}{8} = 255$$

3. Se multiplican los inversos de los valores iniciales por 255.

$$255 \cdot \frac{1}{3} = 85 \qquad 255 \cdot \frac{1}{5} = 51$$

Comprobación:

$$85 + 51 = 136$$

EJERCICIOS resueltos

14. Por un reportaje fotográfico tres fotógrafos cobraron 6720 euros. Del reportaje, 14 fotos eran del primer fotógrafo, 18 del segundo y 24 del tercero. ¿Qué cantidad de euros le corresponde a cada uno?

1. Se suman los valores iniciales: $14 + 18 + 24 = 56$
2. Se divide 6720 entre 56: $6720 : 56 = 120$
3. Se multiplican los valores iniciales por 120.

$120 \cdot 14 = 1680$ euros $\quad 120 \cdot 18 = 2160$ euros $\quad 120 \cdot 24 = 2880$ euros

15. Repartir 540 caramelos entre cuatro niños de forma directamente proporcional a las edades de cada uno de ellos, que son 3, 4, 5 y 6 años.

1. Se suman los valores iniciales: $3 + 4 + 5 + 6 = 18$
2. Se divide 540 entre 18: $540 : 18 = 30$
3. Se multiplican los valores iniciales por 30.

$30 \cdot 3 = 90$ caramelos $\quad 30 \cdot 4 = 120$ caramelos

$30 \cdot 5 = 150$ caramelos $\quad 30 \cdot 6 = 180$ caramelos

16. Según un testamento una fortuna de 65000 euros se reparte entre tres personas en partes inversamente proporcionales al sueldo de cada una que es 900, 1350 y 1800 euros. ¿Cuánto corresponde a cada una?

1. Se suman los inversos de los valores iniciales: $\frac{1}{900} + \frac{1}{350} + \frac{1}{1800} = \frac{13}{5400}$
2. Se divide 65000 entre 13/5400: $65000 : \frac{13}{5400} = 27000000$
3. Se multiplican los inversos de lo valores iniciales por 27000000.

$$27000000 \cdot \frac{1}{900} = 30000 \quad ; \quad 27000000 \cdot \frac{1}{1350} = 20000 \quad ; \quad 27000000 \cdot \frac{1}{1800} = 15000$$

17. Repartir 114 caramelos entre cuatro niños de forma inversamente proporcional a las edades de cada uno de ellos, que son 3, 4, 5 y 6 años.

1. Se suman los inversos de los valores iniciales: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20}$
2. Se divide 114 entre 19/20: $114 : \frac{19}{20} = 120$
3. Se multiplican los inversos de los valores iniciales por 120.

$$120 \cdot \frac{1}{3} = 40 \quad ; \quad 120 \cdot \frac{1}{4} = 30 \quad ; \quad 120 \cdot \frac{1}{5} = 24 \quad ; \quad 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

6. Porcentajes

Tanto por ciento de una cantidad

Calcular el r % de una cantidad C equivale a resolver una actividad de magnitudes directamente proporcionales: "Si al valor 100 de la primera magnitud le corresponde el valor C de la segunda, entonces al valor r de la primera magnitud le corresponde el valor buscado r % de C".

100 ------------ C
r ------------ r % de C

Sin embargo al desarrollar este procedimiento se puede comprobar que para calcular el r % de C se multiplica C por r y se divide por 100.

$$\boxed{\textbf{r\% de C} = \frac{r \cdot C}{100}}$$

La capacidad de un pantano es de 53 Hm^3. ¿Cuántos litros de agua tiene si está lleno en un 15%?

Regla de tres directa

1ª magnitud Porcentaje	**2ª magnitud** Hm^3
100 ----------	**53**
15 ----------	**x**

$$\frac{53}{100} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{53 \cdot 15}{100} = 7,95$$

Solución: **7,95 Hm^3** =

= 7950000000 litros

Directamente:

$$15\% \text{ de } 53 = \frac{15 \cdot 53}{100} = \mathbf{7,95}$$

Tanto por ciento correspondiente a una proporción

Calcular el % que representa una cantidad P de un total C equivale a resolver una actividad de magnitudes directamente proporcionales: "Si al valor C de la primera magnitud le corresponde el valor 100 de la segunda, entonces al valor P de la primera magnitud le corresponde el porcentaje buscado.

C ------------ 100
P ------------ ?

Sin embargo al desarrollar este procedimiento se puede comprobar que para calcular el % se divide P por C y se multiplica por 100.

$$\boxed{\frac{P}{C} \cdot 100\ \%}$$

En mi clase hay 32 estudiantes. Si hay 20 alumnas, ¿qué porcentaje del total representan las alumnas y los alumnos?

Regla de tres directa

1ª magnitud Estudiantes	**2ª magnitud** Porcentaje
32 ----------	**100**
20 ----------	**x**

$$\frac{100}{32} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 20}{32} = 62,5$$

Directamente:

$$\frac{20}{32} \cdot 100 = \mathbf{62,5\ \%}$$

Solución:

Alumnas: 20 de 32 → 62,5 %
Alumnos: 12 de 32 → 37,5 %

EJERCICIOS resueltos

18. a) Calcular el 32 % de 125. b) a) Calcular el 78 % de 4960.

$$32\%\ \text{de}\ 125 = \frac{32 \cdot 125}{100} = 125 \cdot 0{,}32 = 40$$

$$78\%\ \text{de}\ 4960 = \frac{78 \cdot 4960}{100} = 4960 \cdot 0{,}78 = 3868.8$$

19. a) ¿Qué porcentaje representa 396 de un total de 600?
b) ¿Qué porcentaje representa 3576 de un total de 4622?

$$\frac{396}{600} \cdot 100 = 66\,\% \qquad \frac{3576}{4622} \cdot 100 = 77.37\,\%$$

20. a) El 83 % de una cantidad es 9130. Calcular dicha cantidad.
b) El 12 % de una cantidad es 8,4. Calcular dicha cantidad.

$$C \cdot 0{,}83 = 9130 \Rightarrow C = \frac{9130}{0{,}83} = 11000$$

$$C \cdot 0{,}12 = 8{,}4 \Rightarrow C = \frac{8{,}4}{0{,}12} = 70$$

21. El censo electoral de una población es de 24600 personas. En unas elecciones un partido político ha obtenido el 42,5 % de los votos. ¿Cuántas personas lo han votado?

$$42{,}5\%\ \text{de}\ 24600 = \frac{42{,}5 \cdot 24600}{100} = 24600 \cdot 0{,}425 = 10455\ \text{personas}$$

22. Una máquina fabrica al día 450 piezas de las que 18 presentan algún defecto y se desechan. ¿Qué porcentaje de piezas defectuosas fabrica la máquina?

$$\frac{18}{450} \cdot 100 = 4\,\%$$

23. El 34% de las personas asistentes a un congreso son españoles. Sabiendo que hay 85 españoles, ¿cuántas personas asisten al congreso?

$$C \cdot 0{,}34 = 85 \Rightarrow C = \frac{85}{0{,}34} = 250$$

7. Variaciones porcentuales

Aumentos porcentuales

Para aumentar una cantidad C, un r %, se calcula el r % de C y se suma el resultado a la cantidad C.

También se puede calcular directamente. Para ello se calcula el aumento que corresponde a una unidad, llamado **índice de variación**:

$$\textbf{Índice de variación: } \mathbf{I.V. = 1 + \frac{r}{100}}$$

Para calcular el aumento que corresponde a una cantidad inicial C, bastará multiplicar C por el índice de variación.

El precio de una bicicleta era de 240 euros. A este precio hay que añadirle el 16% de I.V.A. ¿Cuál es el precio final?

Paso a paso:

$$16\% \text{ de } 240 = \frac{16 \cdot 240}{100} = 38{,}40$$

$$240 + 38{,}40 = \mathbf{278{,}40 \text{ euros}}$$

Directamente:

$$I.V. = 1 + \frac{16}{100} = 1 + 0{,}16 = 1{,}16$$

$$240 \cdot 1{,}16 = \mathbf{278{,}40 \text{ euros}}$$

Solución: **278,40 euros**

Disminuciones porcentuales

Para disminuir una cantidad C, un r %, se calcula el r % de C y se resta el resultado a la cantidad C.

También se puede calcular directamente. Para ello se calcula la disminución que corresponde a una unidad, llamada **índice de variación**:

$$\textbf{Índice de variación: } \mathbf{I.V. = 1 - \frac{r}{100}}$$

Para calcular el aumento que corresponde a una cantidad inicial C, bastará multiplicar C por el índice de variación.

El precio de un ordenador era de 1200 euros, pero me han hecho un 15% de descuento. ¿Cuál es el precio final?

Paso a paso:

$$15\% \text{ de } 1200 = \frac{15 \cdot 1200}{100} = 180$$

$$1200 - 180 = \mathbf{1020 \text{ euros}}$$

Directamente:

$$I.V. = 1 - \frac{15}{100} = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$$

$$1200 \cdot 0{,}85 = \mathbf{1020 \text{ euros}}$$

Solución: **1020 euros**

Encadenamiento de aumentos y disminuciones porcentuales

Se trata ahora de aplicar de forma consecutiva dos o más aumentos o disminuciones porcentuales a una cantidad.

El primer aumento o disminución se aplicará a la cantidad inicial y el segundo a la cantidad resultante después de la primera variación.

Para aplicar un encadenamiento de aumentos y disminuciones porcentuales se calcula el índice de variación de cada variación porcentual. **La cantidad final se calcula multiplicando la cantidad inicial por los índices de variación**:

CF = CI · IV1 · IV2

EJERCICIOS resueltos

24. Al subir el precio de una bicicleta un 20%, el precio final es ahora de 360 euros. ¿Cuál era el precio inicial?

$$\text{Índice de variación: } I.V. = 1 + \frac{20}{100} = 1 + 0,20 = 1,20$$

$$C.I.\cdot I.V. = C.F. \;\Rightarrow\; C.I.\cdot 1,20 = 360 \;\Rightarrow\; C.I. = \frac{360}{1,20} = 300 \text{ euros}$$

25. Al aumentar el precio de una bicicleta ha pasado de 450 a 504 euros. ¿Qué tanto por ciento ha subido?

$$C.I.\cdot I.V. = C.F. \;\Rightarrow\; 450\cdot I.V. = 504 \;\Rightarrow\; I.V. = \frac{504}{450} = 1,12 = 1 + \frac{12}{100} \;\Rightarrow\; 12\%$$

26. Después de rebajar el precio de un ordenador un 8%, me ha costado 1196 euros. ¿Cuál era su precio inicial?

$$\text{Índice de variación: } I.V. = 1 - \frac{8}{100} = 1 - 0,08 = 0,92$$

$$C.I.\cdot I.V. = C.F. \;\Rightarrow\; C.I.\cdot 0,92 = 1196 \;\Rightarrow\; C.I. = \frac{1196}{0,92} = 1300 \text{ euros}$$

27. Al rebajar el precio de un ordenador ha pasado de 1100 euros a 957 euros. ¿Qué tanto por ciento ha bajado?

$$C.I.\cdot I.V. = C.F. \;\Rightarrow\; 1100\cdot I.V. = 957 \;\Rightarrow\; I.V. = \frac{957}{1100} = 0,87 = 1 - \frac{13}{100} \;\Rightarrow\; 13\%$$

28. Un juguete vale en una juguetería 40 euros. Durante las fiestas navideñas sube un 22% y una vez que éstas han pasado, baja un 9%. Calcular su precio final.

Aumento del 22%: $\quad \text{Índice de variación: } I.V.1 = 1 + \frac{22}{100} = 1 + 0,22 = 1,22$

Disminución del 9%: $\quad \text{Índice de variación: } I.V.1 = 1 - \frac{9}{100} = 1 - 0,09 = 0,91$

$$C.F. = C.I. \cdot I.V.1 \cdot I.V.2 = 40 \cdot 1,22 \cdot 0,91 = 44,41 \text{ euros}$$

29. El precio de un móvil era de 420 euros. Me han rebajado un 16%, pero después me han cargado el 16% de I.V.A. ¿Cuánto me ha costado?

Disminución del 16%: $\quad \text{Índice de variación: } I.V.1 = 1 - \frac{16}{100} = 1 - 0,16 = 0,84$

Aumento del 16%: $\quad \text{Índice de variación: } I.V.1 = 1 + \frac{16}{100} = 1 + 0,16 = 1,16$

$$C.F. = C.I. \cdot I.V.1 \cdot I.V.2 = 420 \cdot 0,84 \cdot 1,16 = 409,25 \text{ euros}$$

Para practicar

1. Se ha pagado 255 euros por la compra de 3 calculadoras. ¿Cuánto valen 7 calculadoras? ¿Y 30? ¿Y 23?

2. Un automóvil consume 56 litros de gasolina al recorrer 800 kilómetros, ¿cuántos litros de gasolina consumirá en un viaje de 500 kilómetros?

3. Una tubería tiene una fuga de agua y pierde 322 litros de agua cada 7 minutos. ¿En cuánto tiempo se perderán 2300 litros?

4. Se dispone de 420 litros de agua almacenados en 7 depósitos iguales. ¿Cuántos litros de agua contendrán 13 depósitos iguales a los anteriores?

5. Una máquina envasa 1200 latas de refresco en una jornada de 8 horas. ¿Cuántas latas de refresco envasará en un día que trabaje 5 horas?

6. Completar la tabla sabiendo que las dos magnitudes son directamente proporcionales:

24	8	b	40	d	6,6	f
60	a	30	c	75	e	0,25

7. Nueve personas realizan un trabajo en 16 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en realizar el mismo trabajo 8 personas?

8. Un grifo echa 20 litros de agua por minuto y tarda en llenar un depósito una hora y 30 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar el mismo depósito un grifo que eche 30 litros de agua por minuto?

9. Cuatro personas tardan 40 días en pintar la pared exterior de un campo de fútbol, ¿cuántos días tardarán 5 personas en hacer el mismo trabajo?

10. Un tren circulando a 120 km/h ha tardado 6 horas en hacer un recorrido. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacer el mismo recorrido un tren que circula a una velocidad de 90 km/h?

11. Un rectángulo tiene 25 centímetros de base y 18 centímetros de altura. ¿Qué altura deberá tener un rectángulo de 15 centímetros de base para que tenga la misma superficie?

12. Completar la tabla sabiendo que las dos magnitudes son directamente proporcionales:

15	40	b	180	d	0,5	f
24	a	60	c	120	e	0,01

13. Seis obreros enlosan 1200 m^2 de suelo en 4 días. ¿Cuántos metros cuadrados de suelo enlosarán 12 obreros en 5 días?

14. En una campaña publicitaria 6 personas reparten 5000 folletos en 5 días. ¿Cuántos días tardarán 2 personas en repartir 3000 folletos?

15. Para construir 4 casas iguales en 30 días hacen falta 60 albañiles. ¿Cuántos albañiles se necesitarán para construir 6 casas en 90 días

16. Para imprimir unos folletos publicitarios, 9 impresoras han funcionado 8 horas diarias durante 40 días. ¿Cuántos días tardarán en imprimir el mismo trabajo 6 impresoras funcionando 10 horas diarias?

17. Veinte obreros han colocado durante 6 días 400 metros de cable trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias tendrán que trabajar 24 obreros durante 14 días para tender 700 metros de cable?

18. Repartir 2100 euros de forma directamente proporcional a:
    a) 1 y 2
    b) 1, 2 y 3
    c) 1, 2, 3 y 4
    d) 1, 2, 3, 4 y 5
    e) 1, 2, 3, 4, 5 y 6

19. Cinco concursantes participan en una competición en la que tienen que encontrar objetos en el fondo de una piscina. Por orden de actuación consiguen respectivamente 8, 12, 13, 7 y 10 objetos. El premio de la prueba consiste en 150 puntos repartidos de forma proporcional a los objetos que encuentren. ¿Cuántos puntos corresponden a cada participante?

20. Tres socios pusieron en marcha un negocio aportando, 5000 euros el primero, 25000 euros el segundo y 20000 euros el tercero. El primer año se obtienen 60000 euros de beneficio, ¿cómo deben repartírselos?

21. Realizar los siguientes repartos inversamente proporcionales:
a) Repartir 144 entre 1 y 2
b) Repartir 132 entre 1, 2 y 3
c) Repartir 175 entre 1, 2, 3 y 4
d) Repartir 137 entre 1, 2, 3, 4 y 5
e) Repartir 294 entre 1, 2, 3, 4, 5 y 6

22. Tres amigos se reparten una pizza de forma inversamente proporcional a sus pesos que son respectivamente 60, 72 y 90 kilogramos. ¿Qué parte de pizza se debe comer cada uno?

23. Un profesor entrega una relación de 86 ejercicios a cuatro alumnos para que se los repartan con la condición de que cada uno resuelva una cantidad inversamente proporcional a las calificaciones obtenidas en un examen. Las calificaciones han sido 2, 4, 5 y 8. ¿Cuántos ejercicios debe resolver cada uno?

24. La factura de dos meses de luz de una familia es de 65 euros, a falta de añadir el 16 % de I.V.A. ¿Cuánto supone el I.V.A.? ¿Cuál es el precio final de la factura?

25. El 45 % de los alumnos de un instituto ha aprobado todas las asignaturas al final del curso. Sabiendo que han aprobado 234 alumnos, ¿cuántos estudiantes hay en el instituto?

26. Un trabajo realizado en un taller de automóviles vale 80 euros. Por pagarlo al contado me hacen un descuento del 7 %. ¿Cuánto me han descontado? ¿Cuánto tengo que pagar?

27. Un reloj valía 32 euros, pero el relojero me lo ha rebajado y he pagado finalmente 28.80 euros. ¿Qué % me ha rebajado?

28. Durante un incendio ha ardido el 40 % de los árboles de un bosque. Si después del incendio contamos 4800 árboles, ¿cuántos árboles había al principio?

29. El precio de un traje es de 360 euros. En las rebajas se le ha aplicado un primer descuento del 30% y después se ha vuelto a rebajar un 20%. ¿Cuál es el precio final?

30. El precio de un coche es de 11400 euros. Al comprarlo me han hecho un descuento del 22 %, pero después había que pagar un 17% de impuestos de matriculación. ¿Cuál es el precio final?

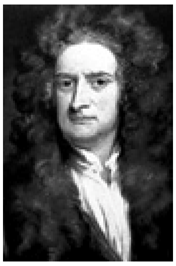
31. Un artículo que vale 50 euros tiene los siguientes cambios de precio: primero sube un 30 %, a continuación baja un 15 %, vuelve a bajar un 25 %, y por último tiene una subida del 10 %. ¿Cuál es su precio final? ¿Qué porcentaje ha variado respecto del precio inicial?

32. Un empleado ha tenido dos subidas de sueldo en un año por un porcentaje de un 5 % y un 4 % respectivamente. El sueldo final es de 2184. ¿Cuál era el sueldo a principios de año?

33. En distintos supermercados nos hemos encontrado las siguientes ofertas. Decidir razonadamente la que más interesa al consumidor:
a) Pague dos y llévese tres.
b) Pague 3 y llévese cuatro.
c) La segunda a mitad de precio.

Para saber más

Son muchas las situaciones de la vida cotidiana y las aplicaciones a cualquier rama del saber de la Proporcionalidad y los Porcentajes. Por poner algún ejemplo citamos la Ley de Gravitación Universal:



Sir Isaac Newton, (4 de enero de 1643 – 31 de marzo de 1727).

Fue un científico, físico, filósofo, inventor, alquimista y matemático inglés, autor de los ***Philosophiae naturalis principia mathematica***, más conocidos como los *Principia*, donde describió la **Ley de Gravitación Universal** y estableció las bases de la Mecánica Clásica mediante las leyes que llevan su nombre.

Dice así:

La fuerza que ejerce un objeto dado con masa (m_1) sobre otro con masa (m_2) es **directamente proporcional** al producto de las masas, e **inversamente proporcional** al cuadrado de la distancia (d) que separa sus centros de gravedad.

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

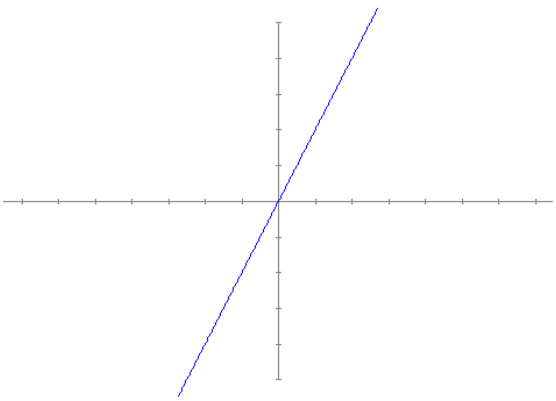
G es la constante de gravitación.
Su valor es: $G = 6'67x10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

Además en este curso estudiarás la **función de proporcionalidad directa** y la **función de proporcionalidad inversa** en la unidad 11.

La función de proporcionalidad directa es de la forma **f(x)=m·x**, donde **m** es la constante de proporcionalidad directa.

Para m=2, una tabla de valores es:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	4	6	8	10	12	14	16	18

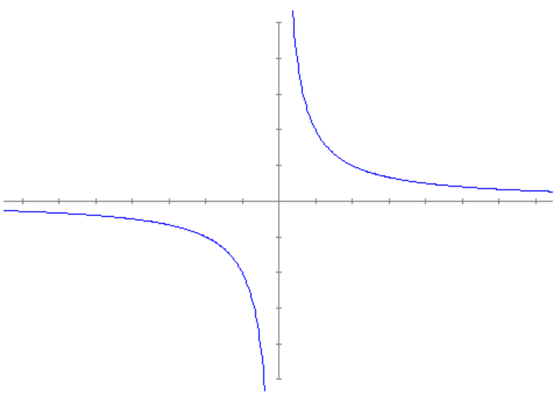


La gráfica es una línea recta.

La función de proporcionalidad inversa es de la forma **f(x)=k/x**, donde **k** es la constante de proporcionalidad inversa.

Para k=2, una tabla de valores es:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	1	0,67	0,5	0,4	0,33	0,29	0,25	0,22



La gráfica es una curva llamada hipérbola.

Recuerda lo más importante

1. Proporción numérica.

Se llama razón entre a y b al cociente $\frac{a}{b}$.

Una proporción numérica es una igualdad entre dos razones numéricas.

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se verifica que $a \cdot d = b \cdot c$.

2. Proporcionalidad directa.

Magnitudes directamente proporcionales.

Si se multiplica (o divide) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

El cociente entre cada pareja de valores de ambas magnitudes es constante. Se llama razón de proporcionalidad directa.

3. Proporcionalidad inversa.

Magnitudes inversamente proporcionales.

Si se multiplica (o divide) una de ellas por un número, la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número.

El producto entre cada pareja de valores de ambas magnitudes es constante. Se llama razón de proporcionalidad inversa.

4. Proporcionalidad compuesta.

La proporcionalidad compuesta consiste en relacionar tres o más magnitudes.

Al resolver una actividad de proporcionalidad compuesta se relacionan las magnitudes de dos en dos y se mantienen constantes las demás.

5a. Repartos directamente proporcionales.

Consiste en dividir una cantidad entre varias partes de forma que cada una de ellas reciba una cantidad directamente proporcional a un valor inicial de cada parte.

Se divide la cantidad a repartir por la suma de los valores iniciales de cada parte y se multiplica el resultado obtenido por cada valor inicial.

5b. Repartos inversamente proporcionales.

Consiste en dividir una cantidad entre varias partes de forma que cada una de ellas reciba una cantidad inversamente proporcional a un valor inicial de cada parte.

Se hace el reparto de forma directamente proporcional a los inversos de los valores iniciales de cada una de las partes.

6. Tanto por ciento.

Para aplicar un porcentaje **r%** a una cantidad **C**, se puede plantear una actividad de magnitudes directamente proporcionales.

$$r\% \text{ de } C = \frac{C \cdot r}{100} = C \cdot \frac{r}{100}$$

Con esta última fórmula se puede deducir que para calcular un porcentaje, basta multiplicar la cantidad **C** por el número **r/100**.

(Se puede aplicar la fórmula inferior sustituyendo índice de variación por r/100)

7. Variaciones porcentuales.

Para aumentar o disminuir un porcentaje **r%** a una cantidad **C**, se puede calcular el r% de C y sumar o restar esta cantidad a la cantidad inicial C.

Se puede calcular directamente la cantidad final calculando la variación correspondiente a cada unidad, llamada índice de variación, y multiplicarlo por la cantidad inicial.

Para un aumento: $I.V. = 1 + \frac{r}{100}$

Para una disminución: $I.V. = 1 - \frac{r}{100}$

Cantidad inicial x Índice de variación = Cantidad final

Autoevaluación

1. En una canalización se pierden por fugas 96 litros de agua cada 15 minutos. ¿En cuánto tiempo se perderán 288 litros?

2. Doce personas realizan un trabajo en 30 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en realizar el mismo trabajo 18 personas?

3. En una campaña publicitaria 10 personas reparten 5000 folletos en 12 días. ¿Cuánto tiempo tardarán 6 personas en repartir 2500 folletos?

4. Repartir 344 objetos de forma directamente proporcional a 10, 14 y 19.

5. Repartir 70 objetos de forma inversamente proporcional a 6 y 8.

6. A una reunión asisten 340 personas. De ellas, el 70 % son mujeres. ¿Cuántas mujeres hay en la reunión?

7. El 75 % de los árboles de un bosque son pinos. Sabiendo que hay 900 pinos, ¿cuántos árboles hay en el bosque?

8. El pasado curso había en el instituto 750 alumnos y este año ha aumentado un 12 %. ¿Cuántos alumnos hay ahora?

9. La población de mi pueblo ha pasado en un año de 2600 a 2678 habitantes. ¿Qué tanto por ciento ha aumentado?

10. El precio de una bicicleta era de 360 euros. En primer lugar se le aplica un aumento del 25% y después una rebaja del 15%. ¿Cuál es su precio final?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 595 €, 2550 €, 1955 €
2. 35 litros
3. 50 minutos
4. 780 litros
5. 750 latas
6. a=20, b=12, c=100, d=30, e=16,5, f=0,1
7. 18 días
8. 60 minutos
9. 32 días
10. 8 horas
11. 30 centímetros
12. a=9, b=6, c=2, d=3, e=720, f=36000
13. 3000 metros^2
14. 9 días
15. 30 albañiles
16. 48 días
17. 10 horas
18. a) 700 y 1400 €
    b) 350, 700 y 1050 €
    c) 210, 420, 630 y 840 €
    d) 140, 280, 420, 560 y 700 €
    e) 100, 200, 300, 400, 500 y 600 €
19. 24, 36, 39, 21 y 30 puntos
20. 6000, 30000 y 24000 euros
21. a) 96 y 48
    b) 72, 36 y 24
    c) 84, 42, 28 y 21
    d) 60, 30, 20, 15 y 12
    d) 120, 60, 40, 30, 24 y 20
22. 2/5, 1/3 y 4/15 de pizza
23. 40, 20, 16 y 10 ejercicios
24. I.V.A.: 10,40 €.
    Precio final: 75,40 €
25. 520 estudiantes
26. Descuento: 5,6 €
    Precio final: 74,4 €
27. 10 %
28. 8000 árboles
29. 201,60 €
30. 10403,64 €
31. Precio final: 45,58 €
    Descuento: 8,8375 %
32. 2000 euros
33. a) paga: 66,67%, rebaja: 33,33%
    b) paga: 75%, rebaja: 25%
    c) paga: 75%, rebaja: 25 %

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 45 minutos
2. 20 días
3. 10 días
4. 80, 112 y 152 objetos respectivamente
5. 40 y 30 objetos respectivamente
6. 238 mujeres
7. 1200 árboles
8. 840 alumnos
9. 3 %
10. 382,5 euros

No olvides enviar las actividades al tutor ►

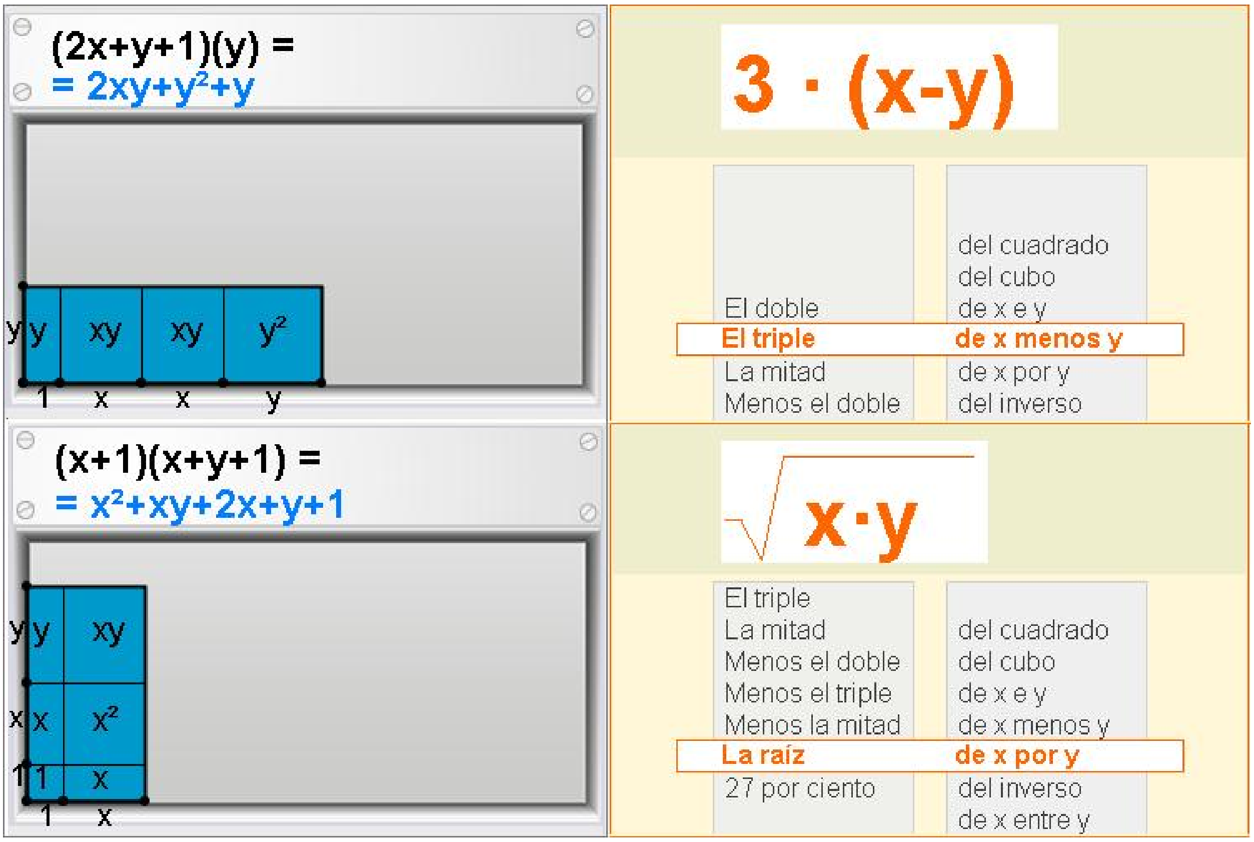
5

Expresiones algebraicas

Objetivos

- Crear expresiones algebraicas a partir de un enunciado.
- Hallar el valor numérico de una expresión algebraica.
- Clasificar una expresión algebraica como monomio, binomio,... polinomio.
- Operar con monomios (sumar, restar y multiplicar).
- Operar con polinomios (sumar, restar y multiplicar por un monomio).

Antes de empezar



Expresiones algebraicas

En la imagen, a la izquierda se pueden ver dos ejemplos en los que se aplica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, el gráfico explica esta propiedad que se utilizará en este tema. Observa atentamenta las áreas de los rectángulos y construye figuras similares para aplicar esta propiedad.

A la derecha se muestran dos expresiones algebraicas, ¿sabrías construir las diferentes expresiones que se obtienen al mover las listas grises? Por ejemplo, el 27 por ciento del cuadrado será

$$0{,}27\ x^2.$$

1. Expresiones algebraicas

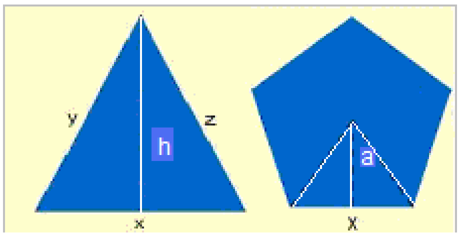
¿Qué son?

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras unidos entre sí por las operaciones de sumar, restar, multiplicar, dividir y por paréntesis. Por ejemplo:

$$3+2\cdot x^2-x \quad \text{o} \quad x\cdot y-32\cdot(x\cdot y^2-y)$$

Las letras representan valores que no conocemos y podemos considerarlas como la generalización de un número. Las llamaremos **variables**.

Nota
El signo de multiplicar se sobreentiende delante de una letra o un paréntesis. Así, 3·a es equivalene a 3a, y 3·(2+x) es equivalente a 3(2+x).



El perímetro del triángulo es x+y+z

El área del triángulo es $\frac{x\cdot h}{2}$

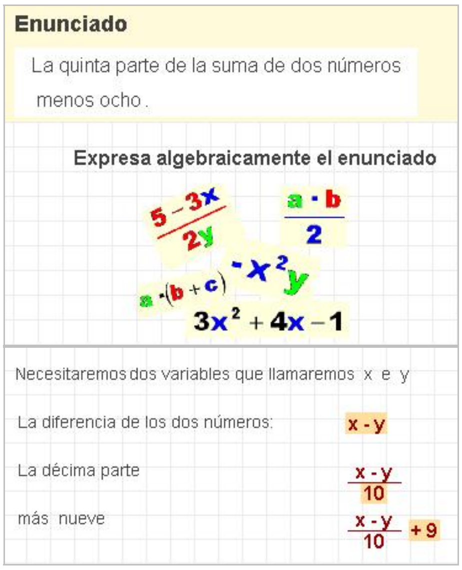
El perímetro del pentágono 5 x

El área del pentágono $\frac{5xa}{2}$

¿Cómo las obtenemos?

Pretendemos transformar un enunciado, donde hay uno o varios valores que no conocemos, en una **expresión algebraica.**

Cada uno de los valores (**variables**) que no conocemos lo representaremos por una letra diferente.

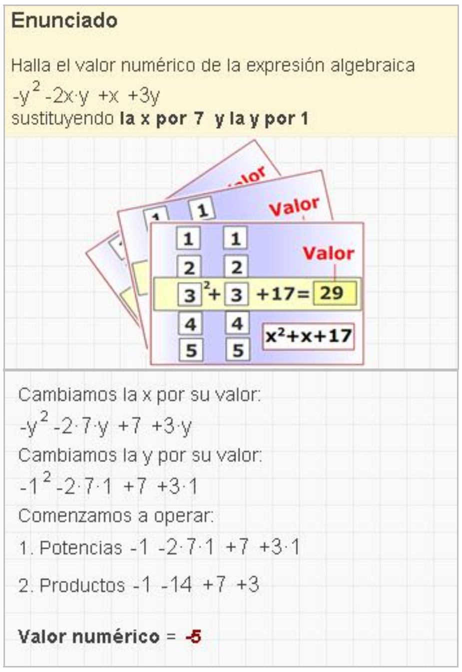


Valor numérico

Si en una expresión algebraica sustituimos las letras (variables) por números, lo que tendremos será una expresión numérica. El resultado de esta expresión es lo que llamamos **valor numérico** de la expresión algebraica para esos valores de las variables.

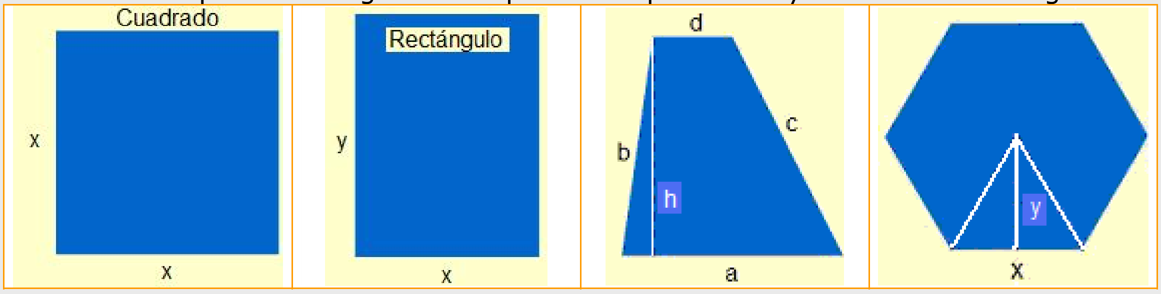
Es importante que tengas en cuenta la **prioridad de las operaciones**

1. Potencias
2. Productos y cocientes
3. Sumas y restas



EJERCICIOS resueltos

1. Halla las expresiones algebraicas que dan el perímetro y el área de cada figura



Soluciones

Perímetro = 4 x Área = x^2	Perímetro = 2 (x + y) Área = x y	Perímetro = a+b+c+d Área = $\frac{(a+d)h}{2}$	Perímetro = 6 x Área= 3 x y

2. Escoge la expresión algebraica en cada caso

1 El triple de un número más seis A $6x+3$ B $3x+6$ C $3(x+6)$ D $\frac{x}{3}+6$	2 La quinta parte de un nº más 10. A $\frac{x}{5}+10$ B $\frac{x+10}{5}$ C $10x+5$ D $5x+10$	3 Un cuarto de la suma un nº más 7. A $\frac{x+7}{4}$ B $\frac{x}{4}+7$ C $\frac{14+7}{4}$ D $\frac{7}{4}+x$	4 La semisuma de dos números. A $\frac{x\cdot y}{2}$ B $\frac{x+y}{2}$ C $\frac{x}{2}+y$ D $\frac{x-y}{2}$	5 La mitad del producto de 2 nºs. A $\frac{x}{2}\cdot y$ B $\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}$ C $\frac{x-y}{2}$ D $\frac{x\cdot 7}{2}$
6 La raíz cuadradade la suma de 2 cuadrados. A $x+y$ B x^2+y^2 C $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$ D $\sqrt{x^2+y^2}$	7 El 40% de un número. A $0.4\ x$ B $\frac{40}{100\ x}$ C $\frac{40}{10}x$ D $\frac{100\ x}{40}$	8 El cuadrado de la suma de 2 números. A $(z+y)^2$ B x^2+y^2 C $x+y^2$ D $(12+y)^2$	9 El cuadrado de la semisuma de 2 números. A $\frac{x^2+y^2}{4}$ B $\frac{x+y^2}{2}$ C $\frac{(x+y)^2}{4}$ D $\frac{(x+y)^2}{2}$	10 La media aritmética de tres números A $0.5x+0.5y+0.5z$ B $\left(\frac{x+y}{2}+z\right)/2$ C $\frac{x+y+z}{3}$ D $\frac{x+y+z}{2}$

Soluciones: 1 B; 2 A; 3 A; 4 B; 5 A; 6 D; 7 A; 8 A; 9 C; 10 C.

3. Halla los valores numéricos indicados en cada caso.

$2-7\cdot x^5$ en (-2)	$3+5\cdot x^3$ en $\frac{2}{3}$	$3\sqrt{x}-3\cdot x^3$ en 9	$\frac{x^5}{y^3}+4$ en $x=-2$, $y=3$	$\frac{x^5}{y^4}+1$ en $x=4$, $y=4$
$2-7\cdot(-2)^5$	$3+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$3\sqrt{9}-3\cdot 9^3$	$\frac{(-2)^5}{3^3}+4$	$\frac{4^5}{4^4}+1$
$2-7\cdot -32$	$3+5\cdot\frac{8}{27}$	$3\cdot 3-3\cdot 729$	$\frac{-32}{27}+4$	4^1+1
$2+224$	$3+\frac{40}{27}$	$9-2187$	$\frac{76}{27}$	$4+1$
226	$\frac{121}{27}$	-2178		5

2. Monomios

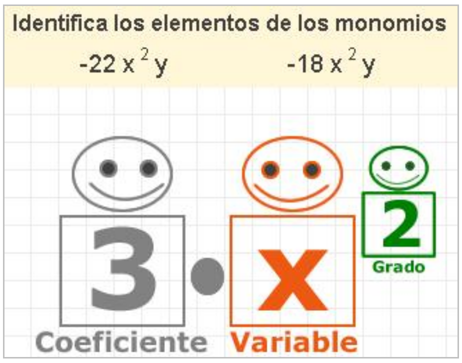
¿Qué son?

Un monomio es una expresión algebraica formada por el producto de un número y una o más variables. Al número lo llamaremos **coeficiente** y al conjunto de las variables, **literal**.

Llamaremos **grado** del monomio a la suma de los exponentes de su parte literal. Y **grado respecto de una variable**, al exponente de esa variable.

Dos monomios son **semejantes** si sus literales son iguales.

Dos monomios son **opuestos** si son semejantes y sus coeficientes son opuestos.



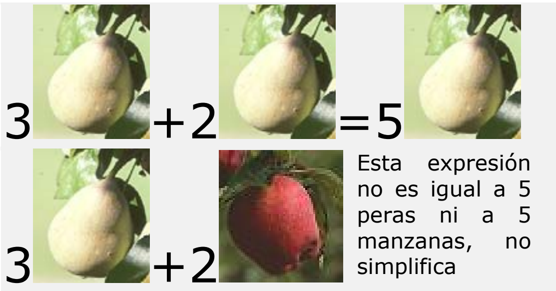
Monomio	Coeficiente	Literal	Grado
$-22x^2y$	-22	x^2y	3
$-18x^2y$	-18	x^2y	3

Son semejantes, pues tienen igual el literal

No son opuestos, pues los coeficientes no lo son

Sumar y restar monomios

Tres peras y dos peras son 5 peras. Pero 3 peras y 2 manzanas no son 5 peras ni 5 manzanas, son 3 peras + 2 manzanas.



Lo mismo ocurre con los monomios. Si dos monomios son semejantes, sumamos o restamos los coeficientes y dejamos el mismo literal. Si no son semejantes, esta operación no puede expresarse de manera más simplificada.

$3x+2x=5x$, pero las expresiones $3x^2+2x$ o $2x+7y$ no se pueden simplificar.

$$2x^7y^3 + 6x^7y^3$$

Monomios semejantes, por tanto se suman los coeficientes

$$8x^7y^3$$

$$2x^7y^3 - 6x^7y^3$$

Para restarlos se procede se forma similar,

$$-4x^7y^3$$

$$2x^7y^3 + 6x^5y^3$$

Monomios no semejantes, por tanto la expresión no se puede simplificar, el resultado es

$$2x^7y^3 + 6x^5y^3$$

Análogamente

$$2x^7y^3 - 6x^5y^3$$

es

$$2x^7y^3 - 6x^5y^3$$

Multiplicar monomios

El producto de dos monomios es un monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y por parte literal el producto de las partes literales (recuerda la propiedad: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$).

Así,
$(3x^2y)\cdot(2x)=(3\cdot 2)x^2yx=6x^{2+1}y=6x^3y$

$$\left(\frac{3}{2}x^3y^2\right)\cdot\left(\frac{2}{5}x^3y\right)$$

Multiplicamos los coeficientes: $\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{5}$

Multiplicamos los literales: $\left(x^3y^2\right)\cdot\left(x^3y\right)=$

$=x^6y^3$

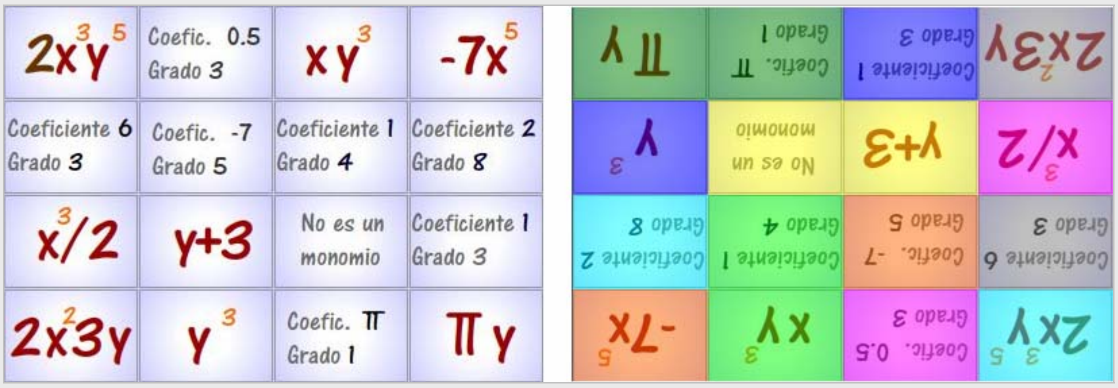
Resultado

$\frac{3}{5}x^6y^3$

cidead

EJERCICIOS resueltos

4. Empareja los rectángulos de la izquierda, a la derecha está la solución.



5. Suma y resta las siguientes parejas de monomios

a) $3/2\ x^3y,\ \ 2\ x^3y$ b) $2xy,\ \ x^3y$ c) $x^2y^3,\ \ -7/4\ x^2y^3$ d) $\pi x,\ \ 6x$

Soluciones suma:
a) $7/2\ x^3y$ b) $2xy + x^3y$ c) $-3/4\ x^2y^3$ d) $(\pi+6)x$

Soluciones resta:
a) $-1/2\ x^3y$ b) $2xy - x^3y$ c) $11/4\ x^2y^3$ d) $(\pi-6)x$

6. Escoge la etiqueta que da el resultado correcto del producto de los monomios indicados en cada caso.

$4x^2y^3$ y $5y^3$	
$9x^2y^6$	$20x^2y^6$
$20x^2+y^6$	$-20x^2y^6$
$20xy^9$	$45x^2y^6$

Solución: fila 1 columna 2

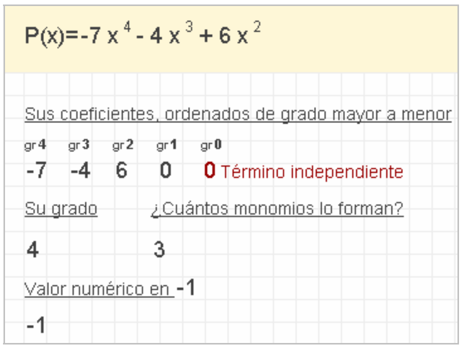
$-9y^2$ y $-6x$	
$-15xy^2$	$96xy^2$
$54x+y^2$	$54x^2y$
$54xy^2$	$-54xy^2$

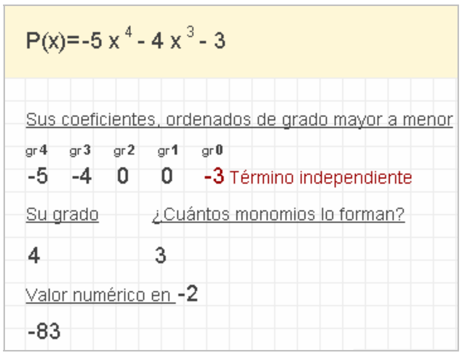
Solución: fila 3 columna1

3. Polinomios

¿Qué son?

La suma de varios monomios no semejantes es un polinomio, el conjunto de los polinomios está formado por monomios o sumas de monomios no semejantes.
Si uno de los monomios no tiene parte literal, se le llama **término independiente.**
El mayor grado de todos sus monomios, es el **grado del polinomio.**
Nombramos los polinomios con una letra mayúscula y entre paréntesis las variables que lo integran, pero en esta página nos restringiremos a una sola variable.
Es importante que sepas identificar los **coeficientes** de un polinomio según su grado, si **P(x)=**x^3**+2**x**-4,** su **grado es 3** y su coeficiente de grado tres es 1, su coeficiente de grado uno es 2 y el término independiente o coeficiente de grado cero es -4.



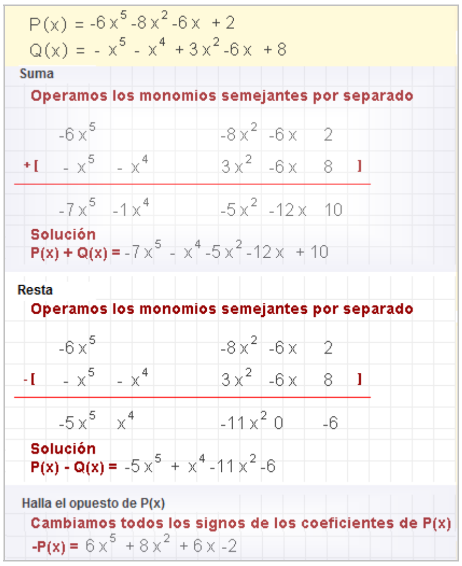


Sumar y restar polinomios

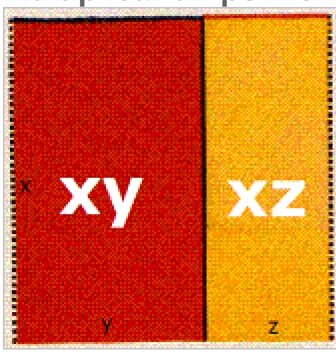
Para sumar o restar dos polinomios, operamos sus monomios semejantes. Si no los tienen, dejamos la operación indicada.
Así, si $P(x)=3x^2+4x$ y $Q(x)=4x-1$,
$P(x)+Q(x)=[3x^2+4x]+[4x-1]=3x^2+8x-1$
$P(x)-Q(x)=[3x^2+4x]-[4x-1]=3x^2+1$

Polinomios opuestos

Dos polinomios son opuestos si al sumarlos todos sus términos se anulan.
Así, si $P(x)=3x^2+4$ y $Q(x)=-3x^2-4$,
entonces: **P(x)+Q(x)**$=[3x^2+4]+[-3x^2-4]=$
$=3x^2+4-3x^2-4$**=0, Q(x) es el opuesto de P(x).**
Para conseguir el polinomio opuesto de P(x), sólo tenemos que cambiar los signos de sus coeficientes. Lo representaremos por -P(x).

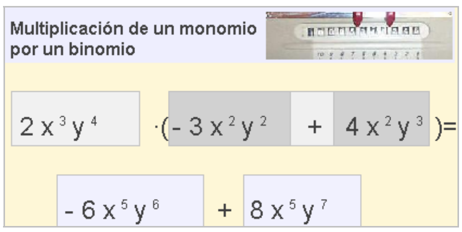


Multiplicar un polinomio por un monomio



En los Elementos de Euclides se ilustran con imágenes las operaciones de polinomios: x(y+z)=xy+xz en la izquierda. Este libro se escribió en el Siglo III a.d. C. , y sigue interesando en nuestros días. En la página del saber más podrás ver otras ilustraciones.

El siguiente ejemplo te ayudará a dominar esta operación.
$P(x)=3x^2+4x$ $\qquad$ $Q(x)=3x$:
$P(x)\cdot Q(x) = [5x^2+4x]\cdot[3x] =$
$= [5x2]\cdot[3x] + [4x]\cdot[3x] = 15x^3+12x^2$



EJERCICIOS resueltos

7. Con los elementos de la izquierda, escribe el polinomio P(x) que cumpla las condiciones de la derecha.

+5	El grado de P(x) es **7**
-3 -4	El coeficiente de mayor grado es **-4**
x^7	El coeficiente de grado 5 es **5**
x^5	El coeficiente de grado 3 es **-3**
x^3 -5	El coeficiente de grado 0 es **-5**
	Los demás coeficientes son todos cero.

P(x) =

Solución: $P(x) = -4x^7 + 5x^5 - 3x^3 - 5$

8. Halla P(x)-Q(x)

$P(x) = -x^3 + 3x^2 - \frac{4}{3}x$

$Q(x) = -x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{2}x - 4$

$P(x)-Q(x) = \frac{8}{3}x^2 - \frac{23}{6}x + 4$

Halla P(x)+Q(x)

$P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x$

$Q(x) = \frac{2}{5}x^3 - x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{5}{4}$

$P(x)+Q(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{29}{20}x - \frac{5}{4}$

9. Halla la expresión en coeficientes de los siguientes productos

Multiplica el polinomio

$P(x) = -9x^4 + 8x$

por -4 y por $11x^4$

Multiplicamos, por separado, todos los términos de P(x)

$[-9x^4]\cdot[-4] = 36x^4$

$[8x]\cdot[-4] = -32x$

Solución

$P(x)\cdot(-4) = 36x^4 - 32x$

Multiplicamos, por separado, todos los términos de P(x)

$[-9x^4][11x^4] = -99x^8$

$[8x][11x^4] = 88x^5$

Solución

$P(x)\cdot(11x^4) = -99x^8 + 88x^5$

Para practicar

1. Halla la expresión algebraica que da las unidades de un número de tres cifras.

2. Mi paso es de 69 cm. ¿Cuántos pasos daré para dar tres vueltas a un circuito de a metros?

3. Si hace tres horas estaba en el kilómetro 26 de una carretera y voy a una velocidad media de x km/h ¿En qué punto kilométrico me encuentro de la misma carretera?

4. En tres cuartos de hora hay 45 minutos ¿Sabes cuantos minutos hay en 2·r/s horas?

5. La expresión algebraica que define el precio de un artículo de y€ si nos rebajan un x% es (100 – x) / 100 · y. Halla el precio de un artículo de 52€ si se rebaja un 25%.

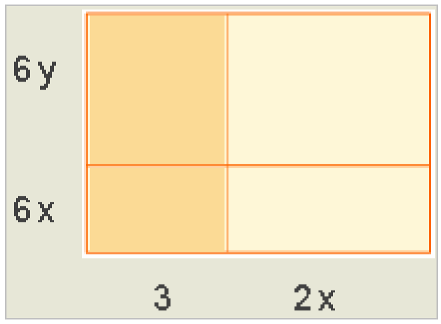
6. Halla el valor numérico de $P(x)= 6x^2+7x+3$ en $x=10$ y en $x=0,1$.

7. Halla el valor numérico de $(10x+y)/99$ en $x=6$ $y=8$.

8. Doblando un alambre de 40 cm formamos un rectángulo. Halla la expresión algebraica que define el área del rectángulo y calcula su valor para x=4. (Ver figura)

9. ¿Cuál es el grado del polinomio $-3x^4+9x^2$? ¿Cuál es su coeficiente de grado dos? ¿y el de grado uno? Calcula su valor numérico en x=2.

10. Multiplica $3\cdot(6x+6y)$ y $2x\cdot(6x+6y)$. Completa las áreas de los rectángulos.



11. Opera $[4x^3y^3]+[5x^4y^2]$ y $[-7x^3]+[5x^3]$

12. Opera $[-8x^2]-[-3x^2]$

13. Multiplica los monomios $[2x^5y^3]$ y $[-3xy^2]$

14. Halla el opuesto de $[-2x^2y^4]$

15. Suma los polinomios

$$-\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-5x-\frac{4}{5} \quad \text{y}$$

$$x^3+x+\frac{3}{5}$$

16. Resta los polinomios

$$-\frac{3}{4}x^3+\frac{3}{5}x-2 \quad \text{y}$$

$$\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{5}x^2+4$$

17. Multiplica el monomio

$-4x^7y^2$

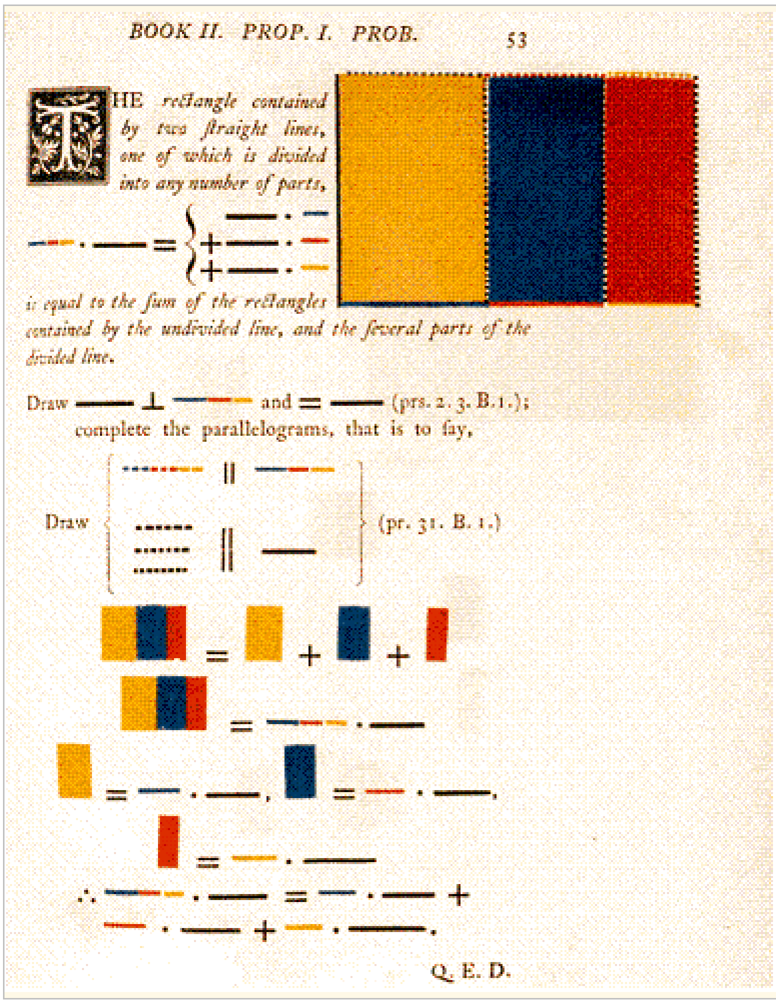
por el binomio

$-4x^8y^7-x^4y^4$

Para saber más

Euclides

En el S. III Euclides escribió Los Elementos en 13 volúmenes. La obra es la segunda en número de ediciones publicadas después de la Biblia (más de 1000).
Las imágenes corresponden a la edición de Byrne publicada en 1847. Son gráficos de las cinco primeras proposiciones del libro II y representan algunas operaciones de polinomios.



BOOK II. PROP. I. PROB. 53

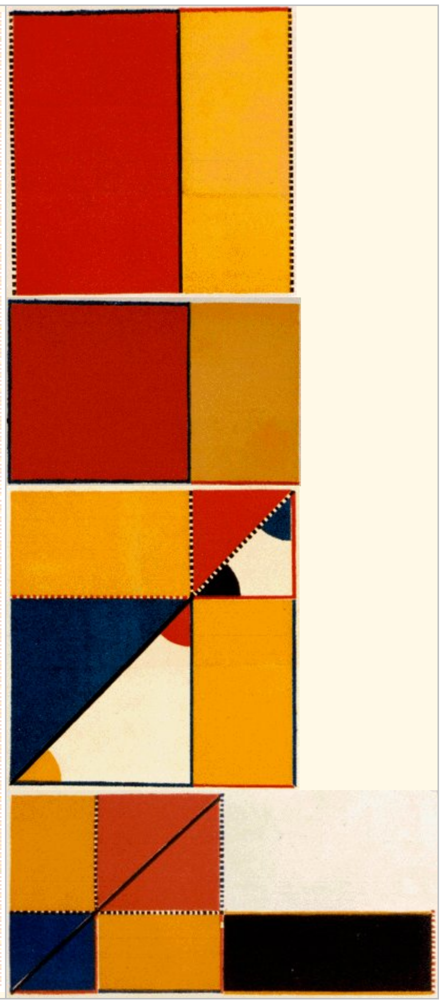
THE rectangle contained by two ſtraight lines, one of which is divided into any number of parts,

is equal to the ſum of the rectangles contained by the undivided line, and the ſeveral parts of the divided line.

Draw ⊥ and = (prs. 2. 3. B.1.); complete the parallelograms, that is to ſay,

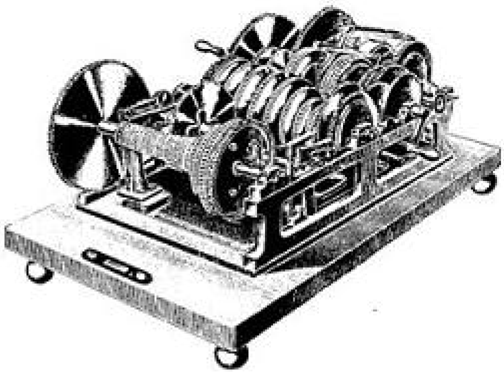
Draw (pr. 31. B. 1.)

Q. E. D.



La Máquina Algebraica de Torres Quevedo

Son muchas las máquinas precursoras de los ordenadores. En las imágenes vemos una aportación española a este desarrollo. Esta máquina calculaba valores numéricos de polinomios.



Recuerda lo más importante

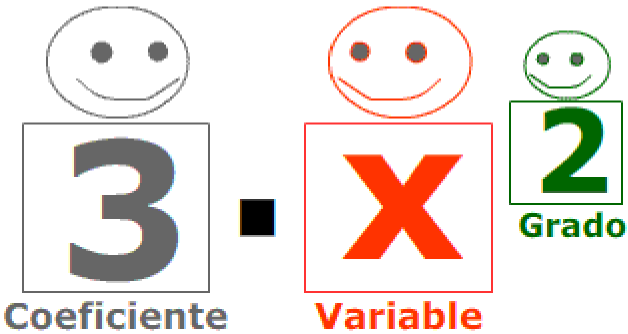
Expresiones algebraicas y sus valores numéricos

El número de ruedas si hay 80 coches y 20 motos, es el **valor numérico** de **$4x + 2y$** en $x=80$, $y=20$:
$4\cdot\mathbf{80} + 2\cdot\mathbf{20} = 360$

La **expresión** que da el precio de las ruedas si la de un coche es z€ y la de una moto t€, es
$4xz + 2yt$

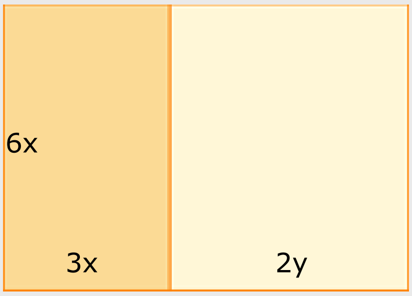
El coste de las ruedas de 2 cohes y una moto si la del coche es de 80€ y la de la motocicleta de 50€ es el **valor numérico** de **$4xz + 2yt$** en $x=2$, $y=1$; $z=80$, $t=50$, que da

$4\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{80} + 2\cdot\mathbf{1}\cdot\mathbf{50} = 740$



Monomios	Polinomios
Suma y resta monomios	Suma y resta polinomios
$7x^3 + 2x = 7x^3 + 2x$ $7x^3 + 2x^3 = 9x^3$ $7x^3 - 2x^3 = 5x^3$	$P(x)= 4x^3 \quad +x-5$ $Q(x)= 2x^3+x^2+2x+4$ $P(x)+Q(x)=6x^3+x^2+3x-1$ $P(x)-Q(x)= 2x^3 -x^2 - x -9$
Multiplica monomios	Multiplica un monomio por un polinomio
$7x^3 \cdot 2x = 14x^4$ $7x^3 \cdot 2x^3 = 14x^6$ $3x^3y^2 \cdot 2x^3y = 6x^6y^3$	$7x^3 \cdot (2x^2+3) =$ $=7x^3 \cdot 2x^2 + 7x^3 \cdot 3 =$ $=14x^5 + 21x^3$

Autoevaluación



1. Halla la expresión algebraica que da las unidades del triple de un número de tres cifras x y z.

2. Halla el área del rectángulo de la izquierda.

3. Valor numérico de $5x^3-4/5x^2+5x+5$ en $x=-2$

4. ¿Cuál es el grado del polinomio $P(x,y)=3x^3y^3-5x^2y^3$?

5. ¿Cuál es el coeficiente de grado 2 de $P(x)=-5x^3+4x^2-3$?

6. P(x) es un polinomio de grado 1 tal que $P(10)=234$, $P(0,1)=6,3$ ¿Sabes si $P(x)=23x+4$ o $P(x)=2x^2+3x+4$ o ninguno de los dos casos?

7. Suma los monomios $2x^6y^5+3x^6y^5$

8. Halla el valor numérico en $x=10$ de la resta de los polinomios $P(x)=6x^2+4x+1$ y $Q(x)=2x^2+5x+4$

9. ¿Cuál es la suma de $\sqrt{3}x^8+4x$ y $5x^8+3x$?

10. ¿Cuál es el grado del producto de $-6x^4y^3$ por $2x^6y^3+3x^8y^6$?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. $100x + 10y + z$
2. $100a/23$
3. $26+3x$
4. $120 \cdot r/s$ minutos
5. 39€
6. en 10, 673; en 0,1, 3,76
7. 0.686868....
8. $20x-x^2$; 64
9. 4; 9; 0; -12
10. $18x+18y$; $12x^2+12xy$

$18y$	$12xy$
$18x$	$12x^2$

11. $4x^3y^3 + 5x^4y^2$; $-2x^3$
12. $-5x^2$
13. $-6x^6y^5$
14. $2x^2y^4$
15. $\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{1}{5}$
16. $-x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}x - 6$
17. $16x^{15}y^9+4x^{11}y^6$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. $300x+30y+3z$
2. $18x^2+12xy$
3. $-241/5$
4. 6
5. 4
6. $P(x)=23x+4$
7. $5x^6y^5$
8. 387
9. $(\sqrt{3}+5)x^8+7x$
10. 21

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

6

Ecuaciones

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer situaciones que pueden resolverse con ecuaciones
- Traducir al lenguaje matemático enunciados del lenguaje ordinario.
- Conocer los elementos de una ecuación.
- Resolver ecuaciones de primer grado.
- Resolver problemas utilizando las ecuaciones.

Antes de empezar

El documento más antiguo en el que se presentan problemas que se resuelven con ecuaciones es el papiro Rhind de 1650 a.C. (en la imagen puede verse un fragmento).

Uno de esos problemas dice: ***"Un montón más la séptima parte del montón es igual a 19. ¿Cuánto hay en el montón?"***

Observa que en aquella época aún no se utilizaba la "x" para resolver las ecuaciones. El lenguaje algebraico que ahora conocemos no existía. Imagina el esfuerzo y la técnica que debían de tener para plantear y buscar soluciones a los problemas con ecuaciones.

Investiga:

La solución del problema del papiro es un número fraccionario (la puedes ver al final del Tema), pero si en vez de **19** ponemos **32** la solución es un número entero. ¿Puedes averiguar de cuántas unidades constaría el montón en ese caso?

1. Ecuaciones: ideas básicas

Igualdades y ecuaciones.

Utilizamos ecuaciones cuando tratamos de averiguar una cierta cantidad, desconocida, pero de la que sabemos que cumple cierta condición.

La cantidad desconocida se llama **incógnita** y se representa por **"x"** (o cualquier otra letra) y la condición que cumple se escribe como una igualdad algebraica a la que llamamos ecuación.

> **Resolver** una ecuación es encontrar el o los valores de la o las incógnitas con los se cumple la igualdad.

Ejemplo

Situaciones que se expresan con ecuaciones

Una madre reparte 57€ entre tres hijos de forma que el mayor reciba 10€ más que el segundo, y éste 10€ más que el tercero. ¿Cuánto recibe cada uno?

LLamamos "x" al dinero que recibe el hijo pequeño, el que recibe menos

Luego el mediano recibe"x+10", y el mayor"x+10+10"

Como en total se reparten 57€,

esa será la suma de "x" y "x+10" y "x+10+10"

Escribimos la ecuación:

$$x+(x+10)+(x+10+10) = 57$$

o, agrupando: $3x+30 = 57$

Aún no hemos resuelto el problema, nuestro primer paso es plantear y escribirlo en forma de ecuación.

Ejemplo

Se reparten 40 € para dos personas, de manera que uno recibe 10 € más que el otro. ¿Cuánto recibe cada uno?

Llamamos "x" al dinero que recibe la 1º persona, la que recibe menos.
¿Cuánto recibe entonces la 21 persona?
La segunda persona recibiría "x+10".

Entre las dos se reparten en total 40 €, entonces la suma de "x" y "x+10" debe ser 40.

Escribimos la ecuación:

$$\mathbf{x+ (x+10) = 40}$$

o agrupando:

$$\mathbf{2x + 10 = 40}$$

Elementos de una ecuación.

Miembros: Son las expresiones que aparecen a cada lado de la igualdad. El de la izquierda se llama 1^er^ miembro. El de la derecha se llama 2º miembro.

Términos son los sumandos que forman los miembros.

Incógnitas: Son las letras que aparecen en la ecuación.

Soluciones: Son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

Grado de una ecuación: Es el mayor de los grados de los monomios que forman los miembros.

Ejemplos

$$3x - 5 = 7 - 2x$$

1^er^ miembro 2º miembro

Incógnita: x

Solución: $x=\frac{12}{5}$

Grado:1

Los términos son:
3x, −5, 7, −2x

$$3x^2 = 48$$

1^er^ miembro 2º miembro

Incógnita: x

Soluciones: x=3, x=-3

Grado:2

Los términos son:
$3x^2$, 48

En el segundo ejemplo, observa que si *x* toma otro valor (por ej: 6, – 12, 5/2,...) la igualdad no se cumple y por tanto no son soluciones.

Ecuaciones equivalentes.

Se llaman **ecuaciones equivalentes** a las que tienen las mismas soluciones.

- Si se suma o resta una cantidad, o expresión, a los dos miembros de una ecuación se obtiene otra equivalente. **Regla práctica:** *"lo que está sumando pasa restando, o viceversa".*

- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un número, o expresión, se obtiene otra equivalente. **Regla práctica:** *"lo que está multiplicando pasa dividiendo, o viceversa".*

Ejemplos

Una madre reparte 57€ entre tres hijos de forma que el mayor reciba 10€ más que el segundo, y éste 10€ más que el tercero. ¿Cuánto recibe cada uno?

Pequeño: x Mediano: x+10 Mayor: x+10+10

Ecuación: x+(x+10)+(x+10+10) = 57

3x+30 = 57

(Haciendo: 3x+10-10 = 40-10)

3x = 57 -30

3x = 27

$\left(\text{Haciendo: } \frac{3x}{3} = \frac{27}{3}\right)$

$x = \frac{27}{3}$

x = 9

Pequeño:9€ Mediano:19€ Mayor:29€

Se reparten 40€ para dos personas, de manera que uno reciba 10€ más que el otro. ¿Cuánto recibe cada uno?

1ªpersona recibe: x 2ªpersona recibe: x+10

Ecuación: x+(x+10)= 40

2x+10 = 40

(Haciendo: 2x+10-10 = 40-10)

2x = 40 -10

2x = 30

$\left(\text{Haciendo: } \frac{2x}{2} = \frac{30}{2}\right)$

$x = \frac{30}{2}$

x = 15

1ªpersona:15€ 2ªpersona:25€

Ejercicios resueltos

1. Si al triple de un número le restamos 16 se obtiene 20. ¿Cuál es el número?

SOLUCIÓN

Al número que buscamos lo llamamos: ***x***

Podemos plantear la siguiente ecuación: $\mathbf{3x - 16 = 20}$

Agrupamos $3x = 20 + 16$, $3x = 36$

Solucionamos $x = 36/3$, $x = 12$

El número buscado es 12.

2. Pedro, que actualmente tiene 42 años, tiene 8 años más que el doble de la edad de Antonio. ¿Qué edad tiene Antonio?

SOLUCIÓN

A la edad de Antonio la llamamos: ***x***

Podemos plantear la siguiente ecuación: $\mathbf{2x + 8 = 42}$

Agrupamos $2x = 42 - 8$, $2x = 34$

Solucionamos $x = 34/2$, $x = 17$

La edad de Antonio es 17.

3. Al sumarle a un número 34 unidades se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 3. ¿Cuál es ese número?

SOLUCIÓN

Al número que buscamos lo llamamos: ***x***

Podemos plantear la siguiente ecuación: $\mathbf{x + 34 = 3x}$

Agrupamos $x - 3x = -34$, $-2x = -34$

Solucionamos $x = -34/-2$, $x = 17$

El número buscado es 17.

Ejercicios resueltos

4. La suma de tres números naturales consecutivos es igual al menor más 19. ¿Cuáles son estos tres números?

SOLUCIÓN

Los números que buscamos los llamamos: ***x, x+1, x+2***
Podemos plantear la siguiente ecuación: $\mathbf{(x) + (x+1) + (x+2) = x + 19}$
Agrupamos $x + x + 1 + x + 2 = x + 19$
$x + x + x - x = 19-1-2$
$2x = 16$
Solucionamos $x = 16/2$, $x = 8$

Los números buscados son 8, 9 y 10.

5. En un trabajo, Miguel ha ganado el doble de dinero que Ana, y Abel el triple de Miguel. Si en total han obtenido 144 €, ¿cuánto ha ganado cada uno?

SOLUCIÓN

Escribimos los nombres con sus incógnitas: Ana: ***x***, Miguel: ***2x***, Abel: $3 \cdot 2x =$ ***6x***
Podemos plantear la siguiente ecuación: $\mathbf{x+2x+6x = 144}$
Agrupamos $9x = 144$
Solucionamos $x = 144/9$, $x = 16$

Ana ganó 16€ , Miguel 32€ y Abel 96€ .

6. Tres hermanos se reparten 89€ . El mayor debe recibir el doble que el mediano y éste 7€ más que el pequeño. ¿Cuánto recibe cada uno?

SOLUCIÓN

Escribimos los hermanos con sus incógnitas: Pequeño: ***x***, Mediano: ***x+7***, Mayor: ***2(x+7)***
Podemos plantear la siguiente ecuación: $\mathbf{(x)+(x+7)+(2(x+7)) = 89}$
Agrupamos $x+x+7+2x+14=89$
$4x=89-7-14$, $4x=68$
Solucionamos $x = 68/4$, $x = 17$

El pequeño recibió 17€ , mediano 24€ y mayor 48€ .

2. Reglas para resolver una ecuación

Ecuación sin denominadores.

Para este tipo de ecuaciones seguimos los siguientes pasos:

1º **Agrupar** los monomios que lleven la incógnita ("las x") en un miembro de la ecuación y los términos independientes en el otro miembro.

2º **Despejar** la incógnita: Dejar la incógnita sola en un miembro de la ecuación.

Ejemplos

Sin paréntesis

$$3x - 2 = -7x + 9$$
$$3x + 7x = 9 + 2$$
$$10\,x = 11$$
$$x = \frac{11}{10}$$

$$0 = 8x - 6 + 4x - 3$$
$$6 + 3 = 8x + 4x$$
$$9 = 12x$$
$$x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Con paréntesis

$$(-3)(7 - 6x) = 9x - 8(3x - 7)$$
$$-21 + 18x = 9x - 24x + 56$$
$$18x - 9x + 24x = 56 + 21$$
$$33\,x = 77$$
$$x = \frac{77}{33} = \frac{7}{3}$$

$$x + 5(6 - 8x) - 4 = 4 + 5x - 2$$
$$x + 30 - 40x - 4 = 4 + 5x - 2$$
$$x - 40x - 5x = 4 - 2 - 30 + 4$$
$$(-44)x = -24$$
$$x = \frac{-24}{-44} = \frac{6}{11}$$

Ecuación con denominadores.

En el caso de haber denominadores hay que tratarlos antes, hacemos:

1º Se calcula el mínimo común múltiplo de **todos** los denominadores de la ecuación.

2º Se reduce a común denominador: cada término se transforma en una fracción equivalente cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

3º Se eliminan los denominadores (Explicación: al multiplicar ambos miembros por el denominador común se obtiene una ecuación equivalente).

4º Se resuelve la ecuación, ya sin denominadores.

Ejemplo

Con denominadores y sin paréntesis

$$-7 + \frac{x}{6} = \frac{7x}{2} - \frac{5}{3}$$
$$-\frac{42}{6} + \frac{1x}{6} = \frac{21x}{6} - \frac{10}{6}$$
$$-42 + 1x = 21x - 10$$
$$-21x + 1x = 42 - 10$$
$$-20x = 32$$
$$x = \frac{32}{-20} = -\frac{8}{5}$$

Resolución general de ecuaciones de primer grado.

En el caso general podemos encontrar paréntesis y denominadores. Debemos primero trabajar con ellos.

Teniendo en cuenta los apartados anteriores seguiremos los siguientes pasos:

1º Quitar paréntesis.

2º Quitar denominadores.

3º Agrupar los monomios que llevan la incógnita en un miembro y los términos independientes en el otro.

4º Despejar la incógnita.

Ejemplo

$$\frac{5}{2}(7+x)=\frac{7x}{8}+\frac{5}{4}$$

$$\frac{35}{2}+\frac{5}{2}x=\frac{7x}{8}+\frac{5}{4}$$

$$\frac{140}{8}+\frac{20x}{8}=\frac{7x}{8}+\frac{10}{8}$$

$$140+20x=7x+10$$

$$-7x+20x=-140+10$$

$$13x=-130$$

$$x=\frac{-130}{13}=-\frac{10}{1}$$

$$x=-10$$

Ejemplo

Sea la ecuación siguiente, resuélvela explicitando paso a paso.

$$\frac{5}{4}-\frac{x-3}{2}=2\left(\frac{7x}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

Nuestro primer paso es quitar paréntesis, recordamos que el número delante del paréntesis, el 2, multiplica a todo el interior de éste.

$$\frac{5}{4}-\frac{x-3}{2}=\frac{14x}{4}+\frac{2}{2}$$

Ahora debemos quitar denominadores. Buscamos el m.c.m de los denominadores, de esta forma los hacemos iguales a través de fracciones equivalentes.

$$\frac{5}{4}-\frac{2x-6}{4}=\frac{14x}{4}+\frac{4}{4}$$

Una vez que tenemos los denominadores iguales, los podemos quitar para quedarnos sólo con los numeradores, ya que si los denominadores son iguales, entonces los numeradores deben ser iguales.
Ten cuidado con los signos delante de la fracción, mira que le ha pasado al término:

$-\frac{2x-6}{4}$ se convierte en $-2x+6$

queda:

$$5-2x+6=14x+4$$

Agrupamos los monomios a un lado y los números al otro.

$$-14x-2x=-5+4-6$$

$$-16x=-7$$

Despejamos la *x* o incógnita.

$$x=\frac{-7}{-16}=\frac{7}{16}$$

Ejercicios resueltos

(Resuelve las siguientes ecuaciones)

7. $4 - 7(2x - 3) = 3x - 4(3x - 5)$

SOLUCIÓN

$$4 - 14x + 21 = 3x - 12x + 20$$
$$-14x - 3x + 12x = 20 - 4 - 21$$
$$-5x = -5$$
$$x = \frac{-5}{-5}$$
$$\mathbf{x = 1}$$

8. $4 - \frac{3-2x}{5} = 7$

SOLUCIÓN

$$\frac{20}{5} - \frac{3-2x}{5} = \frac{35}{5}$$
$$20 - 3 + 2x = 35$$
$$2x = 35 - 20 + 3$$
$$2x = 18$$
$$x = \frac{18}{2}$$
$$\mathbf{x = 9}$$

9. $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{7}{3}\right)$

SOLUCIÓN

$$\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x}{3} - \frac{7}{9}$$
$$\frac{12x}{18} - \frac{9}{18} = \frac{6x}{18} - \frac{14}{18}$$
$$12x - 9 = 6x - 14$$
$$12x - 6x = -14 + 9$$
$$6x = -5$$
$$\mathbf{x = -\frac{5}{6}}$$

Ejercicios resueltos

(Resuelve las siguientes ecuaciones)

10. $2\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{3}\right)-\frac{3x}{10}=3\left(\frac{1}{3}+\frac{2x}{5}\right)-1$

SOLUCIÓN

$$\frac{2x}{5}+\frac{2x}{3}-\frac{3x}{10}=1+\frac{6x}{5}-1$$
$$\frac{2x}{5}+\frac{2x}{3}-\frac{3x}{10}=\frac{6x}{5}$$
$$\frac{12x}{30}+\frac{20x}{30}-\frac{9x}{30}=\frac{36x}{30}$$
$$12x+20x-9x-36x=0$$
$$-13x=0$$
$$x=\frac{0}{-13}$$
$$\mathbf{x=0}$$

11. $\frac{1-x}{3}-\frac{x-1}{12}=\frac{3x-1}{4}$

SOLUCIÓN

$$\frac{4-4x}{12}-\frac{x-1}{12}=\frac{9x-3}{12}$$
$$4-4x-x+1=9x-3$$
$$4+1+3=9x+4x+x$$
$$8=14x$$
$$x=\frac{8}{14}$$
$$\mathbf{x=\frac{4}{7}}$$

12. $5-2\left(\frac{x}{5}+1\right)=\frac{x}{10}+3\left(\frac{x}{2}-1\right)$

SOLUCIÓN

$$5-\frac{2x}{5}-2=\frac{x}{10}+\frac{3x}{2}-3$$
$$\frac{50}{10}-\frac{4x}{10}-\frac{20}{10}=\frac{x}{10}+\frac{15x}{10}-\frac{30}{10}$$
$$50-4x-20=x+15x-30$$
$$50-20+30=x+15x+4x$$
$$60=20x$$
$$x=\frac{60}{20}$$
$$\mathbf{x=3}$$

3. Aplicaciones

Problemas que dan lugar a ecuaciones.

Para traducir un problema al lenguaje algebraico y encontrar su solución, lo primero y más importante es leer con mucha atención el enunciado entendiéndolo completamente, después hay que dar los siguientes pasos:

1) Establecer con precisión cuál será la incógnita.

2) Expresar como una ecuación la relación contenida en el enunciado.

3) Resolver la ecuación.

4) Interpretar la solución de la ecuación en el contexto del enunciado.

5) Comprobar que la solución obtenida cumple las condiciones del enunciado.

Ejemplo

Al sumar el triple de un número con la mitad de dicho número se obtiene 126.
¿De qué número se trata?

1º) x: número buscado

2º) Escribimos la ecuación que verifica:

$$\frac{x}{2}+3x=126$$

3º) Resolvemos la ecuación:

$$\frac{x}{2}+\frac{6x}{2}=\frac{252}{2}$$

$$x+6x=252$$

$$x=\frac{252}{7}=36$$

4º) El número buscado es 36

5º) Su triple es 108. Su mitad es 18
Al sumarlas da 126

El último paso, la comprobación, es muy importante para verificar que hemos resuelto bien el ejercicio.

Ejemplo

Una pluma es 3 € más cara que un bolígrafo. Por dos plumas y 4 bolígrafos pagamos 11´4 €. ¿Cuánto cuesta la pluma y cuánto el bolígrafo?

Para establecer la incógnita debo fijarme en la pregunta, muchas veces me ayuda a saber quien es la *x.*
El bolígrafo es el artículo de menor precio, lo escogemos como la incógnita.

x= precio del bolígrafo
Entonces la pluma costará x+3

Escribimos la ecuación prestando atención a las relaciones establecidas en el enunciado.

$$2(3+x)+4x=11'4$$

Para resolver la ecuación, quitamos paréntesis y denominadores si los hay. Agrupamos:

$$6+2x+4x=11'4$$
$$6x=11'4-6$$
$$6x=5'4$$

Despejamos *x*,

$$x=\frac{5'4}{6}=0'9$$

Interpretamos la solución de la ecuación.

El bolígrafo cuesta 0´9 € y la pluma vale 3´9 €.

Comprobamos, dos plumas cuestan 7´80 €, 4 bolígrafos 3´60 €. En total pagamos 11´40 €.

Para practicar

NOTA IMPORTANTE

No olvides comprobar las soluciones e interpretarlas dentro de los enunciados de los problemas.

1. Resuelve la ecuación:

$$-6-7(8x-4)=-(7-9x)-(x-9)$$

2. Pablo es 4 años más joven que su hermana María y 2 años mayor que su hermano Federico. Entre los tres igualan la edad de su madre, que tiene 59 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

3. Resuelve la ecuación:

$$\frac{7}{2}-\frac{x}{8}=\frac{7x}{4}-\frac{1}{4}$$

4. Lorenzo gasta la mitad de su dinero en un videojuego, y la séptima parte en ir al cine. ¿Cuánto dinero tenía si aún le quedan 15 €?

5. Hallar los lados de un rectángulo de 27 cm de perímetro si la base es 2/7 de la altura.

6. Resuelve la ecuación:

$$\frac{1}{2}=\frac{5x+1}{5}-\frac{9-2x}{4}$$

7. Paloma, Pablo y Andrés reciben 1638 € como pago por un trabajo que han realizado. Si Pablo ha trabajado el triple de días que Andrés y Paloma el triple que Pablo, ¿cómo harán el reparto del dinero?

8. Resuelve la ecuación:

$$(-2)(2-4x)=3x-7(7x-2)$$

9. La edad de Federico es triple de la de María y la de Pablo es la tercera parte de la de María. La suma de las edades de Federico y Pablo es 80 años. Averiguar las edades de los tres.

10. Resuelve la ecuación:

$$7+x=\frac{7x}{2}-\frac{1}{2}$$

11. La suma de las edades de dos amigos es 44. Sabemos que uno de ellos es 2 años mayor que el otro. Averiguar la edad de cada uno.

12. Resuelve la ecuación:

$$\frac{7}{4}+\frac{x-2}{4}=2\left(\frac{7x}{6}-\frac{5}{2}\right)$$

13. Dentro de 10 años Juan duplicará la edad que tenía hace 4 años. ¿Cuál es su edad actual?

14. Resuelve la ecuación:

$$\frac{7}{2}\left(-5x+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{2}+\frac{x}{8}$$

15. Si a la tercera parte de un número le sumamos su quinta parte y además le añadimos 14, obtenemos dicho número. ¿De qué número se trata?

16. El precio de 2 yogures griegos y 4 yogures de coco es 3 €. El yogur griego vale 30 céntimos más que el de coco. Calcular el precio de cada uno.

17. Tres hermanos se reparten 96 € de la siguiente manera: El mediano recibe 12 € menos que el mayor. Y el pequeño recibe la tercera parte que el mediano. ¿Cuánto recibe cada uno?

18. Paloma, Pablo y Andrés comparten la propiedad de un terreno de 1638 Ha. Pablo tiene el doble de terreno que Andrés y Paloma el triple que Pablo. ¿Qué superficie de terreno tiene cada uno?

19. Hemos recorrido la tercera parte de un camino y aún nos quedan 2 Km para llegar a la mitad. ¿Qué longitud tiene el camino?

20. La suma de tres números consecutivos excede en 10 unidades al doble del mayor de los tres. ¿Cuáles son esos números?

21. Resuelve la ecuación:

$$\frac{1}{2}(7+x)=\frac{7x}{6}-\frac{5}{2}$$

22. Resuelve la ecuación:

$$\frac{5}{2}\left(-5-\frac{x}{2}\right)=\frac{5x}{2}+\frac{5}{4}$$

23. Resuelve la ecuación:

$$\frac{5}{2}+\frac{x-2}{2}=2\left(\frac{5x}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

24. Resuelve la ecuación:

$$\frac{9}{4}-\frac{x-1}{2}=\frac{5x}{6}$$

25. Resuelve la ecuación:

$$5+x=\frac{7x}{4}+\frac{1}{2}$$

26. Resuelve la ecuación:

$$\frac{7}{3}-\frac{x}{6}=\frac{5x}{6}-\frac{1}{3}$$

27. Resuelve la ecuación:

$$-5+\frac{x}{6}=\frac{7x}{6}+\frac{1}{3}$$

28. Resuelve la ecuación:

$$\frac{7}{2}+\frac{x}{2}=-5x+\frac{5}{3}$$

29. Resuelve la ecuación:

$$x+7(8-9x)-8=5+6x-8$$

30. Resuelve la ecuación:

$$(-5)(4-5x)=7x-3(3x-9)$$

31. Resuelve la ecuación:

$$-2-2(3x-8)=-(1-9x)-(x-3)$$

Para saber más

El problema del papiro Rhind planteado al principio del tema corresponde a la ecuación:

$$x+\frac{x}{7}=19$$

cuya solución es $x=\frac{133}{8}$

(ó como consta en el papiro $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$).

Papiro Rhind

Desde el papiro Rhind, y a lo largo de más de 3000 años, hay testimonios escritos de muchos problemas que pueden resolverse con ecuaciones de primer grado.

En la Antología Palatina o Antología Griega, del siglo V, se recogen más de 40 problemas de ese tipo.

Antología Palatina, British Museum de Londres

Te proponemos tres de estos problemas llamados "clásicos".

1) Diofanto fue un geómetra griego que vivió en el siglo III a.C. Su juventud ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, su mejilla se cubrió de vello; pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y su hijo nació cinco años después. Al alcanzar éste la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre le sobrevivió cuatro años más. ¿A qué edad murió Diofanto?

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

$$\frac{14x}{84}+\frac{7x}{84}+\frac{12x}{84}+\frac{420}{84}+\frac{42x}{84}+\frac{336}{84}=\frac{84x}{84}$$

x = 84

2) La quinta parte de un enjambre de abejas se posó sobre la flor de la jara, la tercera en la flor del romero, el triple de la diferencia entre estos dos números voló sobre una flor de lavanda, y una abeja quedó sola en el aire atraída por el perfume de un jazmín. ¿Cuántas abejas tenía el enjambre?

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+3\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{5}\right)+1=x$$

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+x-\frac{3x}{5}+1=x$$

$$\frac{3x}{15}+\frac{5x}{15}-\frac{9x}{15}+\frac{15}{15}=0$$

x = 15

3) Los reyes de una dinastía tuvieron nueve nombres diferentes. La tercera parte del total de estos reyes llevó el primero de estos nombres; la cuarta parte, el segundo; la octava parte, el tercero; la doceava parte, el cuarto; y cada uno de los nombres restantes los llevó un solo rey. ¿Cuántos reyes tuvo la dinastía?

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{12}+5=x$$

$$\frac{8x}{24}+\frac{6x}{24}+\frac{3x}{24}+\frac{2x}{24}+\frac{120}{24}=\frac{24x}{24}$$

x = 24

Recuerda lo más importante

Ecuaciones: ideas básicas

- Cuando tratamos de averiguar una cierta cantidad, **la incógnita**, que sabemos que cumple una condición, representamos la cantidad desconocida por "x" (o cualquier otra letra) y la condición que cumple se escribe como una igualdad algebraica a la que llamamos **ecuación.**

- **Resolver** una ecuación es encontrar el o los valores de la o las incógnitas con los que se cumple la igualdad.

- **Miembros**: Son las expresiones que aparecen a cada lado de la igualdad. El de la izquierda se llama 1er miembro. El de la derecha se llama 2º miembro.
- **Términos:** son los sumandos que forman los miembros.
- **Soluciones:** Son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.
- **Grado** de una ecuación: Es el mayor de los grados de los monomios que forman los miembros.

Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones.

- Se llaman ecuaciones equivalentes a las que tienen las mismas soluciones.

- Si se suma o resta una cantidad o expresión a los dos miembros de una ecuación se obtiene otra equivalente.

- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un número (o una expresión algebraica) se obtiene otra equivalente.

Reglas prácticas:

"lo que está sumando pasa restando y lo que está restando pasa sumando"

"lo que está multiplicando pasa dividiendo y lo que está dividiendo pasa multiplicando"

Para resolver ecuaciones de primer grado

Para resolver ecuaciones, los pasos a seguir son:

- Quitar paréntesis.
- Quitar denominadores.
- Agrupar los monomios que llevan la incógnita en un miembro y los términos independientes en el otro.
- Despejar la incógnita.

Para resolver problemas, después de comprender el enunciado:

- Establecer con precisión cuál será la incógnita.
- Expresar como una ecuación la relación contenida en el enunciado.
- Resolver la ecuación.
- Interpretar la solución de la ecuación en el contexto del enunciado.
- Comprobar que la solución obtenida cumple las condiciones del enunciado.

Autoevaluación

1. Resuelve la ecuación (x-8)14 = -28

2. En un rectángulo de perímetro 38 cm la base es 3 cm más larga que la altura. Calcular la longitud de la base.

3. Hemos recorrido la séptima parte de un camino y aún nos faltan 8 Km para llegar a la sexta parte. ¿Qué longitud tiene el camino?

4. Pepe tiene 5 años más que Antonio y éste 7 años más que Ángela. Entre los tres suman 103 años. Calcular la edad de Ángela.

5. Resuelve la ecuación: $\frac{11}{2} = \left(x + \frac{27}{2}\right)\frac{1}{3}$

6. Resuelve la ecuación: $\frac{2x+34}{2} = \left(-\frac{5}{7}\right)(-23-x)$

7. Resuelve la ecuación: $\frac{x-2}{7} - \frac{7-x}{2} = 2$

8. Por 4 pantalones y 3 camisetas pagamos 87 €. Si un pantalón cuesta 6 € más que una camiseta, ¿cuánto cuesta una camiseta?

9. La suma de tres números consecutivos es 84. Halla el menor de los tres.

10. La superficie de una finca es de 156 Ha. Un Olivar ocupa la mitad que un Encinar, y el Trigo ocupa la tercera parte que el Encinar. También hay una superficie de 2 Ha. Dedicada a Huerta. ¿Cuánto ocupa el Encinar?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 5/16
2. Federico:17 años; Pablo:19 años; María: 23 años
3. 2
4. 442 €
5. Altura=10,5 cm; base=3 cm
6. 17/10
7. Andrés recibe 126 €; Pablo, 378 €; Paloma, 1134 €
8. 1/3
9. María:24 años; Federico:72 años; Pablo:8 años
10. 3
11. Un amigo tiene 21 años y el otro 23 años
12. 3
13. 18 años
14. -13/141
15. 30
16. Yogur de coco:0,40 €; yogur griego:0,70 €
17. Mayor:48 €; mediano:36 €; pequeño:12 €
18. Andrés:182 Ha; Pablo:364 Ha; Paloma:1092 Ha.
19. 12 Km
20. 11, 12 y 13
21. 9
22. -11/3
23. 1/4
24. 33/16
25. 6
26. 8/3
27. -16/3
28. -1/3
29. 3/4
30. 47/27
31. 6/7

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 6
2. 8 cm
3. 336 Km
4. 28 años
5. 3
6. -2
7. 9
8. 9 €
9. 27
10. 84 Ha

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

7 Semejanza. Teorema de Pitágoras.

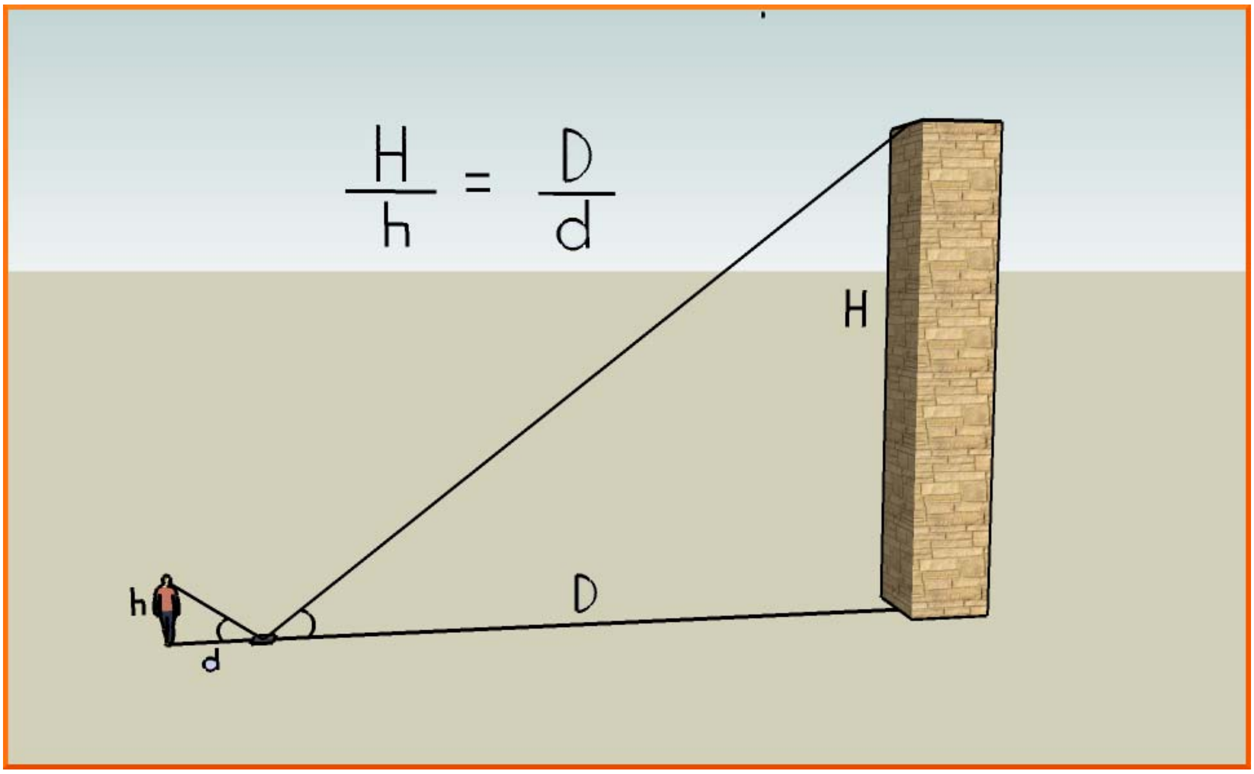
Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Aplicar correctamente el Teorema de Tales.
- Reconocer y dibujar figuras semejantes.
- Aplicar los criterios de semejanza de triángulos.
- Calcular la razón de semejanza.
- Utilizar la relación entre las áreas de figuras semejantes.
- Calcular distancias en mapas y planos.
- Construir figuras a partir de una escala.
- Resolver problemas geométricos aplicando el Teorema de Pitágoras.

Antes de empezar

Aplicando la semejanza aprenderás, entre otras cosas, a medir alturas de edificios con un espejo sin necesidad de subirte a ellos. También puedes hacerlo utilizando sus sombras...



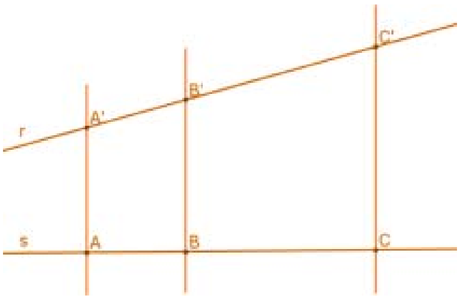
Investiga

En una pizzería, la pizza pequeña tiene 23 cm de diámetro y es para una persona. Sin embargo, la pizza familiar tiene 46 cm de diámetro, justo el doble que la pequeña, pero dicen que es para 4 personas. ¿Nos están engañando?

1. Teorema de Tales

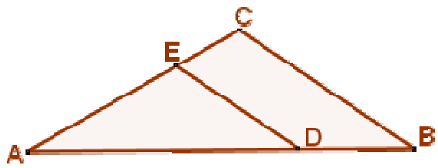
Enunciado y posición de Tales

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos secantes r y s, **los segmentos que determinan dichas paralelas en la recta r son proporcionales a los segmentos que determinan en s.**



$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

Los triángulos ABC y AB'C' comparten el ángulo A, están encajados. Los lados opuestos al ángulo A son paralelos. En estos casos decimos que los dos triángulos están en **posición de Tales:**

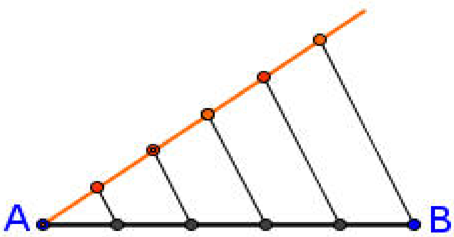


Cuando dos triángulos se pueden colocar en posición de Tales, **sus lados son proporcionales:**

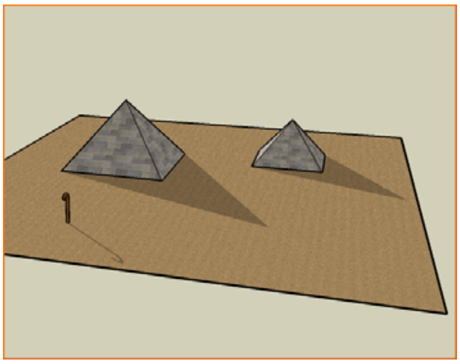
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$$

Aplicaciones

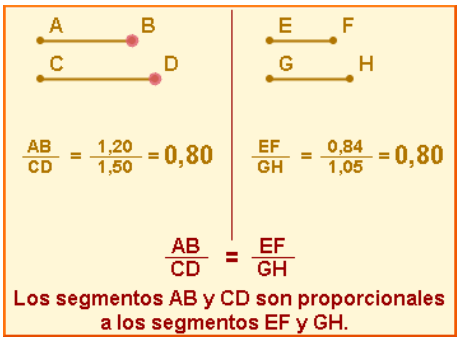
El Teorema de Tales nos permite **dividir un segmento en partes iguales** (cinco en este caso):



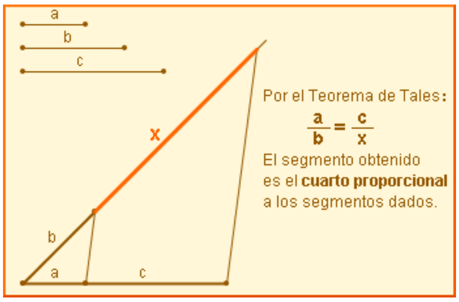
Trazamos una semirrecta a partir de A. Sobre ella marcamos, con el compás, 5 segmentos iguales, de la longitud que queramos. Unimos la última marca con B y trazamos paralelas, una por cada marca de la semirrecta.



Tales de Mileto fue un filósofo y matemático griego que vivió en el siglo VI a. C. Calculó las alturas de las pirámides de Egipto comparando sus sombras con las de un bastón



Dos pares de segmentos son **proporcionales** si la razón entre los dos primeros (cociente entre sus longitudes) coincide con la razón entre los dos últimos.

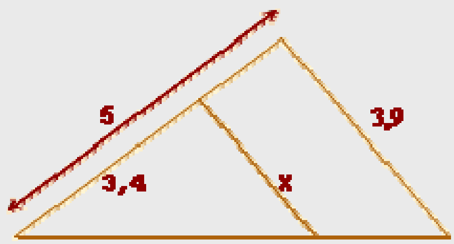


Un segmento, de longitud x, es **cuarto proporcional** a otros tres de longitudes a, b y c si se verifica que:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$$

EJERCICIOS resueltos

1. Usa el teorema de Tales para calcular x.



Los dos triángulos están en posición de Tales, por lo que sus lados son proporcionales:

$$\frac{5}{3{,}4}=\frac{3{,}9}{\mathbf{x}};\quad 5\cdot\mathbf{x}=3{,}4\cdot 3{,}9;\quad \mathbf{x}=\frac{3{,}4\cdot 3{,}9}{5};$$

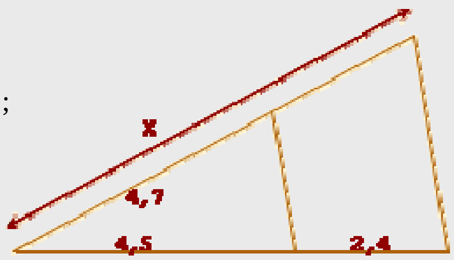
x = 2,6

2. Calcula el valor de x.

Los dos triángulos también están en posición de Tales. Sus lados son proporcionales:

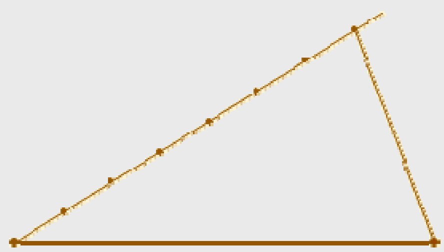
$$\frac{\mathbf{x}}{4{,}7}=\frac{4{,}5+2{,}4}{4{,}5};\quad 4{,}5\cdot\mathbf{x}=4{,}7\cdot(4{,}5+2{,}4);\quad \mathbf{x}=\frac{4{,}7\cdot 6{,}9}{4{,}5};$$

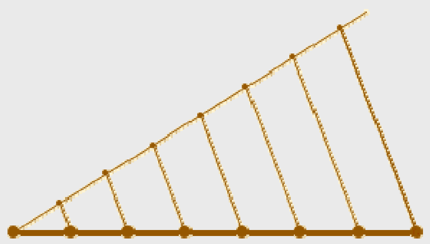
x = 7,2



3. Divide el segmento en 7 partes iguales.

Se traza una semirrecta a partir de uno de los extremos del segmento. Se marcan en ella, con el compás, 7 segmentos iguales, de la longitud que se quiera. Se unen la última marca y el otro extremo del segmento.



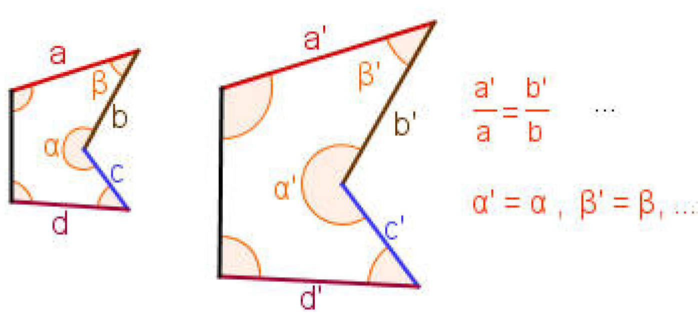


Trazamos paralelas, una por cada marca, y el segmento queda dividido en 7 partes iguales.

2. Semejanza de figuras

Figuras semejantes

Dos figuras son **semejantes** si sus segmentos correspondientes (homólogos) son proporcionales y sus ángulos iguales. Es decir; o son iguales, o **tienen la misma forma y sólo se diferencian en su tamaño.**



Cada longitud en una de las figuras se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo que se llama **razón de semejanza.**

Criterios de semejanza de triángulos

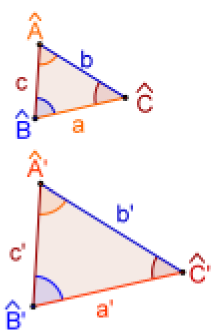
Un **criterio de semejanza** de dos triángulos es un conjunto de condiciones tales que, si se cumplen, podemos asegurar que los dos triángulos son semejantes.

No es necesario comprobar que sus ángulos son iguales y que sus lados son proporcionales para saber si dos triángulos son semejantes. Es suficiente que se cumpla alguno de los siguientes criterios:

1. Tienen dos ángulos iguales.
   $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$

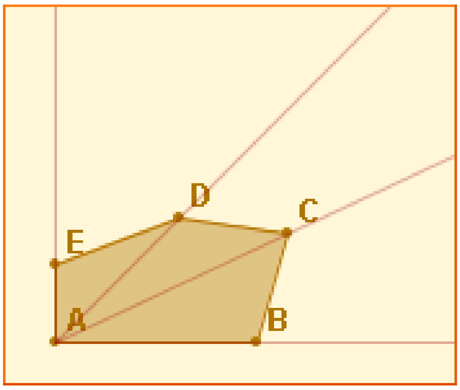
2.- Sus lados son proporcionales.
   $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

3.- Tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual.
   $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ y $\hat{A} = \hat{A}'$

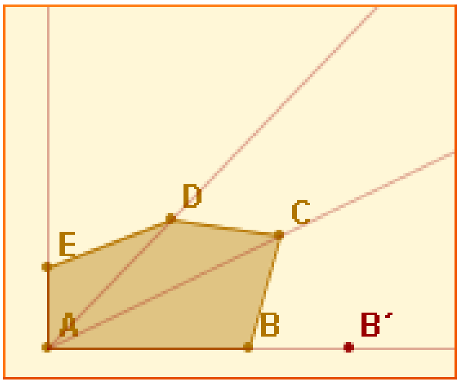


Construcción de polígonos Semejantes.

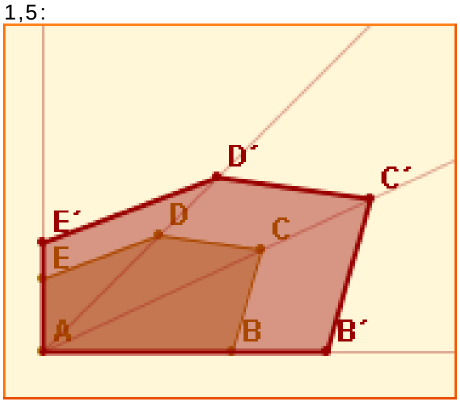
Se elige la razón de semejanza, por ejemplo 1´5, y se trazan semirrectas que unen un vértice con los demás:



En la semirrecta AB se elige un punto B', de forma que AB' sea 1,5 veces más largo que AB:

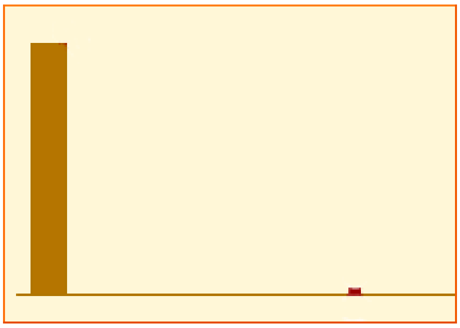


Desde B' se trazan paralelas al polígono inicial, obteniendo un polígono semejante. La razón de semejanza será 1,5:

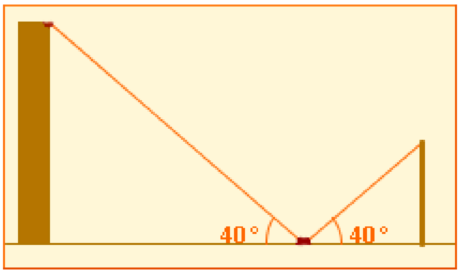


Medición de alturas con espejos y sombras.

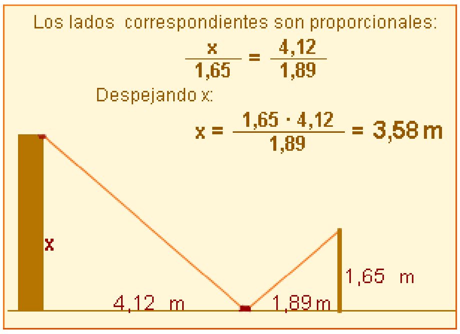
Se coloca un espejo pequeño en el suelo:



El observador se sitúa de forma que, erguido, pueda ver reflejada en el espejo la parte más alta del edificio:



Se miden la altura del observador (desde sus ojos al suelo), la distancia de éste al espejo y la distancia del espejo al edificio:

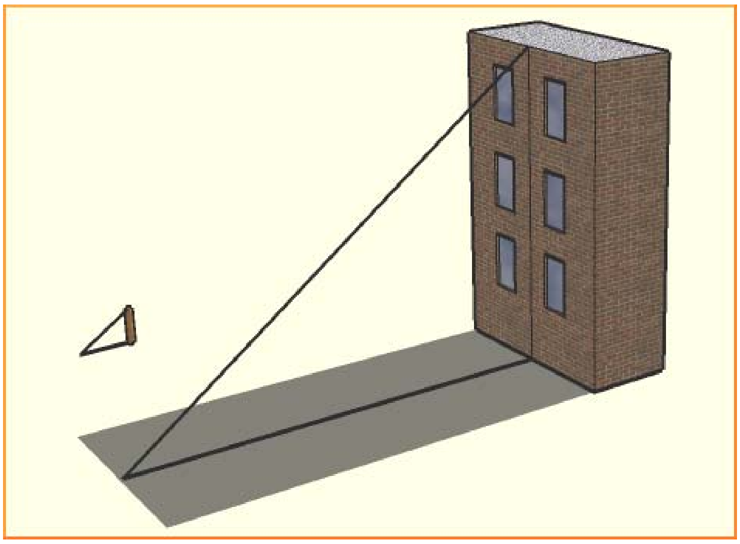


De forma análoga, midiendo las sombras del objeto y de una vara, y la altura de la vara, se puede determinar la altura de un objeto a partir de su sombra.

Aplicaciones

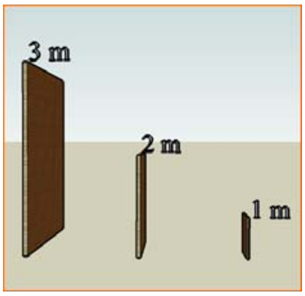
La semejanza de figuras, y en particular la semejanza de triángulos, tiene muchas aplicaciones prácticas. Entre otras:

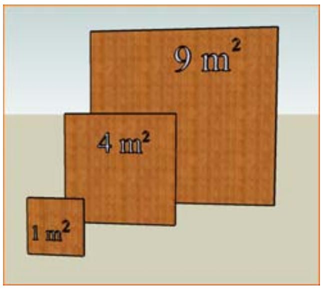
- 1.- Cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra.
- 2.- Cálculo de la altura de un objeto vertical con un espejo.



Relación entre las áreas.

Observa las dos imágenes. Los segmentos en las figuras mediana y grande son el doble y el triple de grandes que los de la figura pequeña.



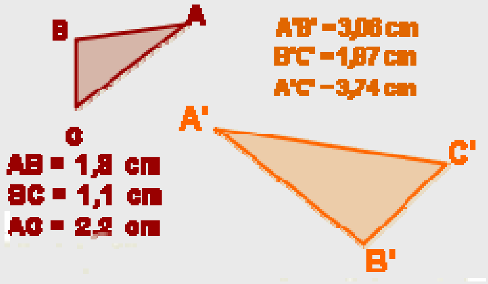


Sin embargo, las áreas son cuatro y nueve veces más grandes. En general, para figuras semejantes:

Razón entre áreas = (Razón de semejanza)^2

EJERCICIOS resueltos

4. ¿Son semejantes los triángulos? En caso afirmativo calcula la razón de semejanza.

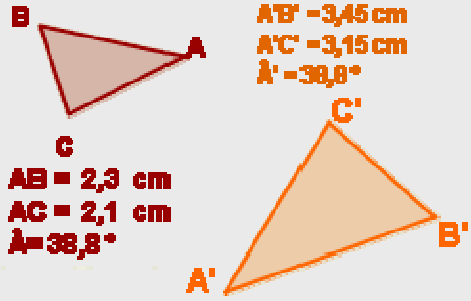


$$\frac{3,06}{1,08}=1,7;\ \frac{1,87}{1,1}=1,7;\ \frac{3,74}{2,2}=1,7$$

Los triángulos son semejantes, ya que tienen sus lados proporcionales (segundo criterio). La razón de semejanza es r=1,7

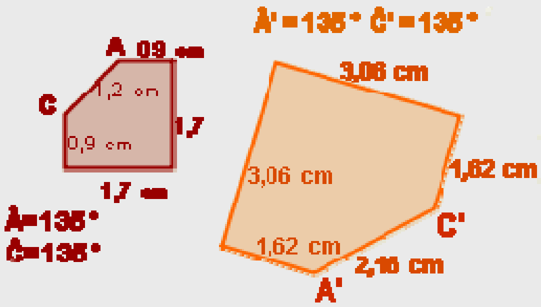
$$\frac{3,45}{2,3}=1,5;\ \frac{3,15}{2,1}=1,5$$

Los triángulos son semejantes, ya que un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales (tercer criterio).
La razón de semejanza es r=1,5



tienen

5. Razona si son semejantes las figuras. En caso afirmativo, calcula la razón de semejanza.

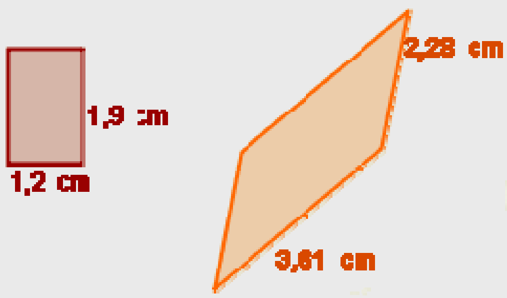


$$\frac{3,06}{1,7}=1,8;\ \frac{1,62}{0,9}=1,8;\ \frac{2,16}{1,2}=1,8$$

Los lados son proporcionales y los ángulos Son iguales, por tanto son semejantes. La razón de semejanza es r= 1,8

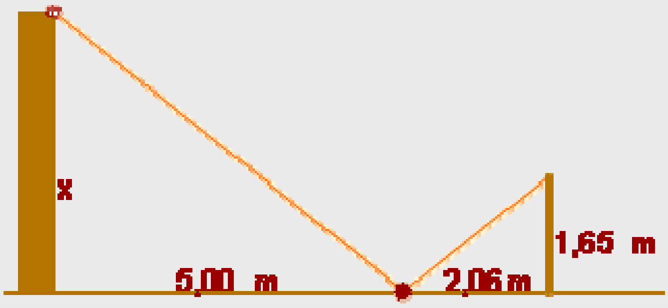
$$\frac{2,28}{1,2}=1,9;\ \frac{3,61}{1,9}=1,9$$

Los lados son proporcionales, pero los ángulos no son iguales. *No son semejantes*.



EJERCICIOS resueltos

6. Un observador, cuya altura desde sus ojos al suelo es 1,65 m, ve reflejada en un espejo la parte más alta de un edificio. El espejo se encuentra a 2,06 m de sus pies y a 5m del edificio. Halla la altura del edificio.

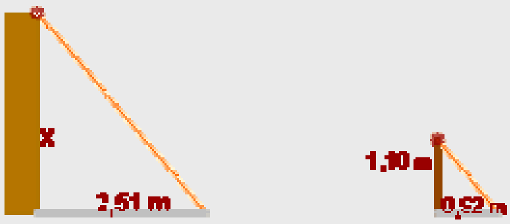


Los dos triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\frac{\mathbf{x}}{1{,}65}=\frac{5}{2{,}06};\quad \mathbf{x}\cdot 2{,}06=5\cdot 1{,}65;$$

$$\mathbf{x}=\frac{5\cdot 1{,}65}{2{,}06}=4\,\mathbf{m}$$

7. Un muro proyecta una sombra de 2,51 m al mismo tiempo que una vara de 1,10 m proyecta una sombra de 0,92 m. Calcula la altura del muro.



Los dos triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\frac{\mathbf{x}}{1{,}10}=\frac{2{,}51}{0{,}92};\quad \mathbf{x}\cdot 0{,}92=1{,}10\cdot 2{,}51;$$

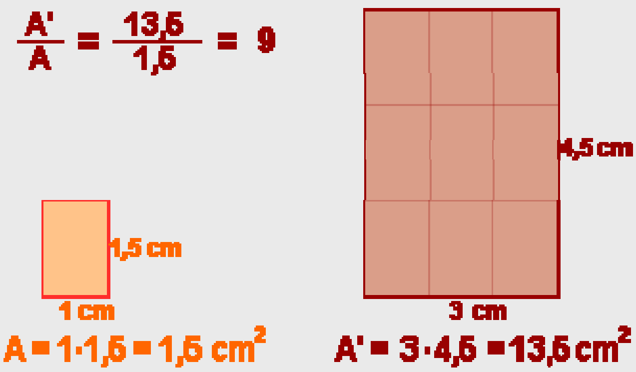
$$\mathbf{x}=\frac{1{,}10\cdot 2{,}51}{0{,}92}=3\,\mathbf{m}$$

8. Un rectángulo de 1 cm x 1,5 cm tiene una superficie de 1x1,5=1,5 cm^2. ¿Qué superficie tendrá un rectángulo el triple de ancho y el triple de largo?

Los dos rectángulos son semejantes y la razón de semejanza es r=3.
La razón entre las áreas es r^2=9, por lo que el rectángulo grande tiene 9 veces más superficie que el pequeño:

A'= 9· A= 9·1,5=**13,5 cm^2**

$$\frac{A'}{A}=\frac{13{,}5}{1{,}5}=9$$



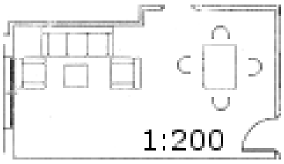
3. Ampliación y reducción de figuras

Ampliación, reducción y escala

La semejanza de figuras nos permite hacer representaciones de objetos reales a un tamaño más grande (**ampliaciones**) o más pequeño (**reducciones**)

En las representaciones de objetos la razón de semejanza recibe el nombre de **factor de escala**.

El factor de escala es 200, el salón en la realidad es 200 veces más grande que en el plano.

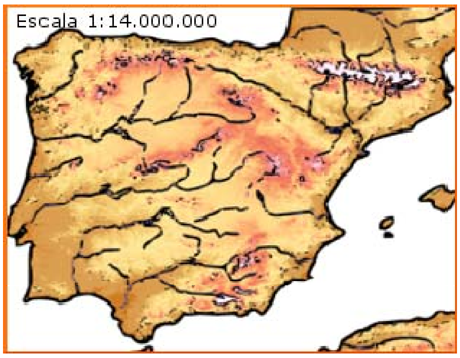


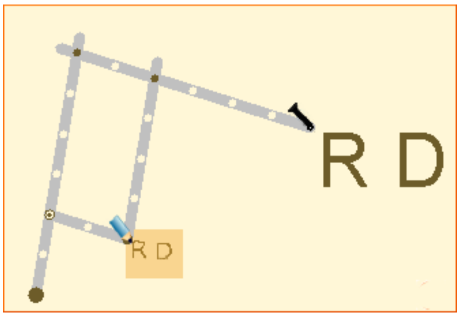
La **escala** se expresa en forma de cociente:

1:200

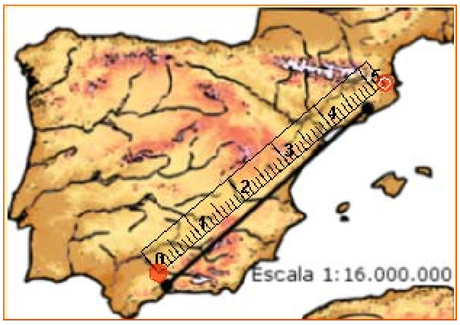
En este caso, 200 es la razón de semejanza o **factor de escala**. La figura representada será 200 veces más grande que la real. En un plano a escala 1:200 **cada centímetro equivale a 200 centímetros en la realidad.**

En este mapa la escala utilizada es 1:14.000.000, lo que significa que **cada cm equivale a 14.000.000 cm. en la realidad; es decir, 140 Km.**

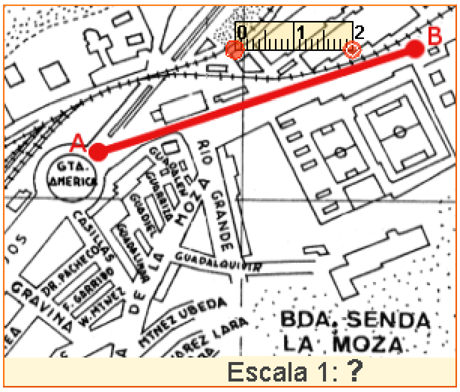




El pantógrafo permite reproducir dibujos, o hacer grabaciones, en tamaños mayores o menores que el original.



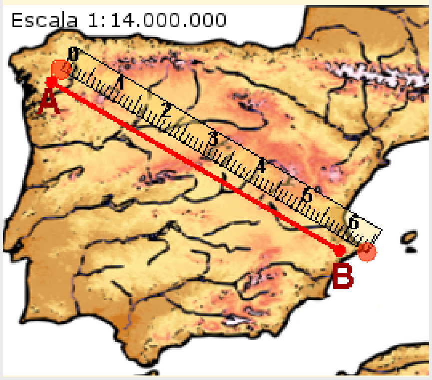
Conociendo la escala es muy fácil calcular las distancias reales. En este caso hay 4,7 cm en el mapa entre los dos puntos marcados, que equivalen a 4,7 cm · 16.000.000 = = 75.200.000 cm = 752 Km. reales.



Aunque no conozcamos la escala, podríamos calcular la distancia real aproximada que hay entre A y B. Bastaría con medir en el plano algún objeto cuyas dimensiones reales se conozcan. El campo de futbol grande podría tener unos 100 m de largo en la realidad...

EJERCICIOS resueltos

9. Calcula la distancia real entre A y B.



La distancia entre real entre A y B será:

6,1 cm · 14.000.000 = 85.400.000 cm =

= **854 Km.**

10. Calcula la escala del mapa sabiendo que el campo de fútbol mide 101 m de largo en la realidad ¿Qué distancia aproximada hay entre A y B en la realidad, si en el plano es de 5,2 cm?

La longitud en el plano del campo es 1,1 cm, que equivalen a 101 m = 10100 cm reales.

$$\frac{1{,}1\,\mathbf{cm\ en\ el\ plano}}{10100\,\mathbf{cm\ reales}} = \frac{1\,\mathbf{cm\ en\ el\ plano}}{\mathbf{x\ cm\ reales}}$$

$$1{,}1\cdot \mathbf{x} = 10100\cdot 1;\ \mathbf{x} = \frac{10100\cdot 1}{1{,}1} = 10.000$$

La escala es **1:10.000.** La distancia de A a B: 5,2·10.000 = 52.000 cm = **520 m** aprox.

11. En un plano cuya escala es 1:40, ¿qué medidas tendrá una mesa rectangular de 0,96 m x 0,72 m?

Las longitudes en el plano serán 40 veces más pequeñas que en la realidad. Las medidas de la mesa son 96 cm x 72 cm, que en el plano serán:

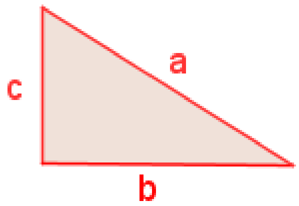
$$\frac{96}{40} = \mathbf{2{,}4\ cm} \qquad \frac{72}{40} = \mathbf{1{,}8\ cm}$$

12. Una maqueta de un coche, a escala 1:50, tiene 8 cm de longitud, 3,5 cm de anchura y 2,8 cm de altura. Calcula las dimensiones reales del coche.

Longitud: 8 cm · 50 = 400 cm = **4 m**
Anchura: 3,5 cm · 50 = 175 cm = **1,75 m**
Anchura: 2,8 cm · 50 = 140 cm = **1,40 m**

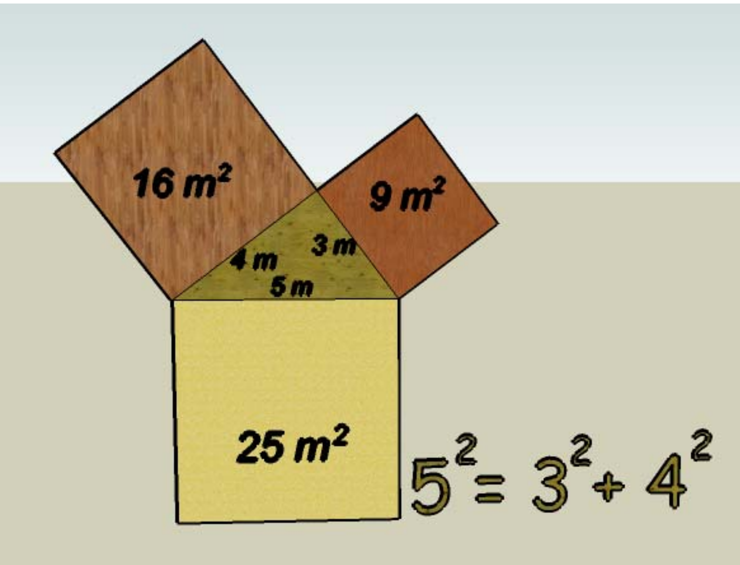
4. Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras da una relación entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo:



$$a^2 = b^2 + c^2$$

En todo triángulo rectángulo se verifica que **el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.**

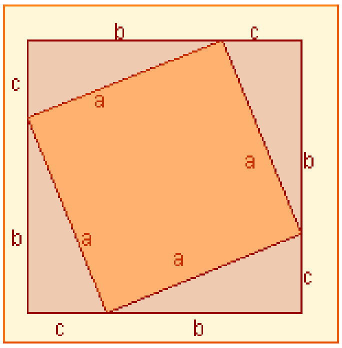


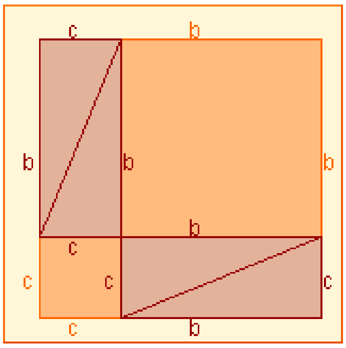
Aplicaciones

El Teorema de Pitágoras tiene muchas aplicaciones; entre otras, se verán en los ejercicios resueltos:

- Representación gráfica de números irracionales.
- Cálculo de la diagonal de un rectángulo.
- Cálculo de la altura de un triángulo isósceles.
- Cálculo de la apotema de un hexágono regular.

Demostración.





Los dos cuadrados son iguales: ambos tienen de lado *b+c.*

La superficie de color rojo es la misma en ambos cuadrados: cuatro triángulos iguales. Por tanto la superficie restante, la naranja, debe ser la misma en ambos cuadrados. La superficie naranja en el primero es:

$$a^2$$

La superficie naranja en el segundo es:

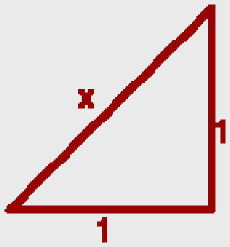
$$b^2 + c^2$$

Conclusión:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

EJERCICIOS resueltos

13. $\sqrt{2}$ =1,414213562373095048801... ¿Se puede dibujar un segmento que mida exactamente $\sqrt{2}$?



Sí, se puede. Sólo tenemos que representar dos segmentos perpendiculares, de longitud 1, y formar con ellos un triángulo rectángulo. La hipotenusa mide exactamente $\sqrt{2}$:

$$x^2 = 1^2 + 1^2; \qquad x^2 = 1 + 1 = 2$$

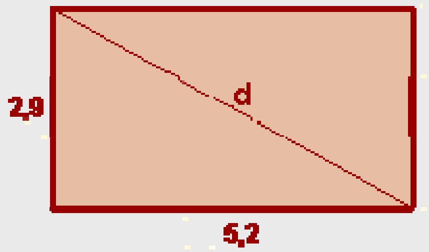
$$\mathbf{x} = \sqrt{2}$$

14. Calcula la diagonal del rectángulo.

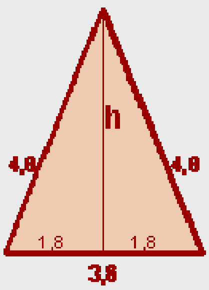
$d^2 = 2{,}9^2 + 5{,}2^2$; $d^2 = 8{,}41 + 27{,}04$

$d^2 = 35{,}45$; $d = \sqrt{35{,}45}$

d = 5,95



15. Calcula la altura de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 4,8 y el otro 3,6.



$h^2 + 1{,}8^2 = 4{,}8^2$; $h^2 = 4{,}8^2 - 1{,}8^2$

$h^2 = 23{,}04 - 3{,}24 = 19{,}80$

$h = \sqrt{19{,}80}$

h = 4,44

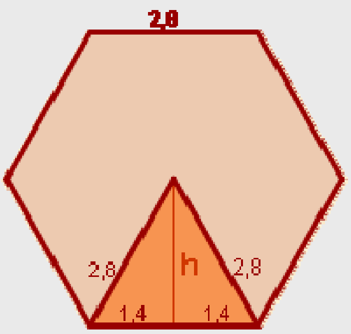
16. Halla la diagonal de un hexágono regular cuyo lado mide 2,8.

$h^2 + 1{,}4^2 = 2{,}8^2$; $h^2 = 2{,}8^2 - 1{,}4^2$

$h^2 = 7{,}84 - 1{,}96 = 5{,}88$

$h = \sqrt{5{,}88}$

h = 2,42



EJERCICIOS resueltos

17. El interior de la señal de tráfico es un triángulo isósceles de 74 cm de lado. La línea que separa la zona blanca de la negra es una altura. ¿Cuánto mide esa altura?

$$h^2 + 37^2 = 74^2 \;;\; h^2 = 74^2 - 37^2$$
$$h^2 = 5476 - 1369 = 4107$$
$$h = \sqrt{4107}$$

h = 64,09 cm

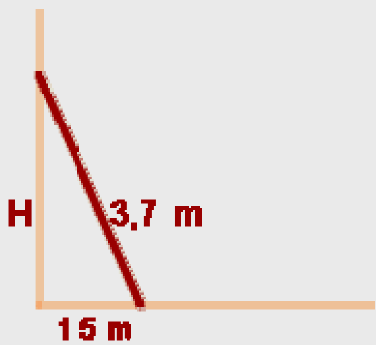
18. En una urbanización se han protegido 310 ventanas cuadradas de 126 cm de lado con una cinta adhesiva especial, como se ve en la figura. ¿Cuántos metros de cinta se han empleado?

La diagonal de la ventana mide:

$$d^2 = 126^2 + 126^2;\; d^2 = 31752$$
$$d = \sqrt{31752} = 178{,}19\,\text{cm}$$

Cinta total: 178,19 · 310 = 55238,9 cm =552,39 m

19. Una escalera de 3,7 m de longitud se encuentra apoyada en una pared, quedando el pie a 1,5 m de la misma. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?



$$H^2 + 1{,}5^2 = 3{,}7^2 \;;\; H^2 = 3{,}7^2 - 1{,}5^2$$
$$H^2 = 13{,}69 - 2{,}25 = 11{,}44$$
$$H = \sqrt{11{,}44}$$

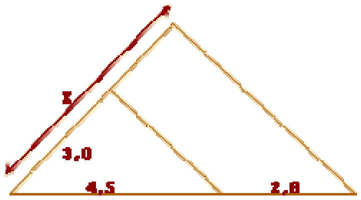
H = 3,38 m

Para practicar

1. Dibuja un segmento de 8 cm de longitud y divídelo en 7 partes iguales.

2. ¿Cuánto medirá un segmento que sea cuarto proporcional a tres segmentos de longitudes 3, 4 y 5 cm?

3. Calcula el valor de x:



4. Los lados de un rectángulo miden 4 cm y 6 cm. ¿Cuánto medirán los lados de un rectángulo semejante al anterior si la razón de semejanza, del segundo al primero, es r=1,3?

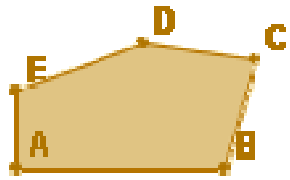
5. El lado de un triángulo equilátero mide 4 cm y el de otro triángulo equilátero 6 cm. ¿Son semejantes ambos triángulos? ¿Por qué? En caso afirmativo, calcula la razón de semejanza.

6. Los lados de un triángulo miden 3 cm, 7 cm y 8 cm. ¿Cuánto medirán los lados de un triángulo semejante al anterior si la razón, del primero al segundo, es r=2?

7. En una fotocopiadora hacemos una ampliación de una hoja al 135%. En dicha hoja aparecía un círculo de 4,8 cm de diámetro. Calcula el diámetro del círculo en la ampliación. Halla la razón de semejanza del círculo grande con respecto al pequeño.

8. Un cuadrilátero tiene de lados 3, 4, 7 y 8 cm. El lado menor de otro cuadrilátero semejante a él mide 32 cm. Calcula la razón de semejanza del cuadrilátero grande respecto al pequeño y la medida de los otros lados.

9. Construye un polígono semejante al de la figura, tomando como razón de semejanza r=1,5.



10. Los lados de un triángulo miden 2, 5 y 7 cm y los de otro 4, 10 y 13 cm. ¿Son semejantes? En caso afirmativo, calcula la razón de semejanza.

11. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 30° y un lado de 56 cm. Otro triángulo rectángulo tiene un ángulo 60° y un lado de 34 cm. ¿Son semejantes ambos triángulos?

12. Di si son semejantes dos triángulos ABC y A'B'C' con los siguientes datos:

a) Â = 30°, AB=4 cm, AC=5cm, Â' =30°, A'B'=12 cm, A'C' = 15 cm.

b) AB=7cm, BC=4cm, AC=9cm, A'B'=14 cm, B'C'=8 cm, A'C'=18 cm.

13. Un muro proyecta una sombra de 32 m al mismo tiempo que un bastón de 1,2 m proyecta una sombra de 97 cm. Calcula la altura del muro.

14. Un observador, cuya altura hasta los ojos es de 1,67 m, observa, erguido, en un espejo la parte más alta de un objeto vertical. Calcula la altura de éste, sabiendo que el espejo se encuentra situado a 10 m de la base del edificio y a 3 m del observador.

15. Un círculo tiene una superficie de 34 m^2, ¿Qué superficie tendrá un círculo el triple de ancho que el anterior?

16. Si con pizza de 23 cm de diámetro puede comer una persona, ¿cuántas podrían comer con una pizza de 32,5 cm?

17. ¿Dos triángulos equiláteros son siempre semejantes? ¿Y dos triángulos isósceles? Razona la respuesta.

18. Dos hexágonos regulares, ¿son semejantes? ¿Y dos polígonos regulares con el mismo número de lados?

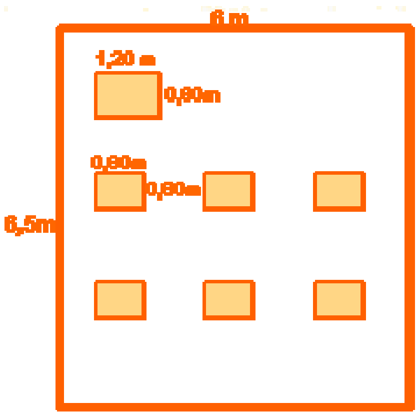
19. En un mapa a escala 1:150.000, la distancia entre dos puntos es de 3,5 cm. ¿Cuál es distancia real entre ellos?

20. Dos pueblos, que en la realidad están a 36 km de distancia, se sitúan en un mapa a 7,2 cm. ¿Cuál es la escala del mapa?

21. En un plano a escala 1:75, ¿qué dimensiones tendrá una mesa de 2,25 m x 1,5 m?

22. En un plano se ha representado con 3,5 cm una distancia real de 1,75 m. ¿Cuál es la escala del plano?

23. En la figura se indican las dimensiones reales de una clase. Haz un plano de la misma a escala 1:120.



24. Una maqueta de una casa, a escala 1:200, tiene una longitud de 3,5 cm, una anchura de 2,7 cm y una altura de 2 cm. ¿Cuáles son las medidas reales de dicha casa?

25. En un plano, a escala 1:500, una parcela tiene una superficie de 12 cm^2. ¿Qué superficie tendrá en la realidad dicha parcela?

26. Calcula la distancia real que habrá entre dos ciudades que están a 4,5 cm de distancia en un mapa en el que otras dos ciudades, que distan 39 km en la realidad, aparecen a 7,8 cm.

27. Calcula la altura que alcanzarían 8 señales de tráfico apiladas como en la figura, si cada una de ellas es un octógono regular de 31 cm de lado y 40,5 cm de radio.

28. Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 50 cm, y uno de sus catetos 40 cm.

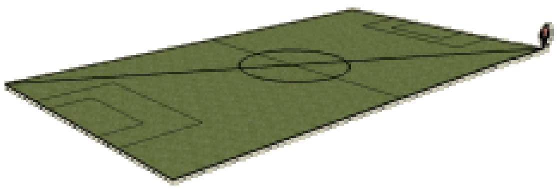
29. Determina, sin dibujarlo, si un triángulo cuyos lados miden 7, 8 y 9 cm es rectángulo.

30. Halla la apotema de un hexágono de 5 cm de lado.

31. Calcula la altura de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 16 cm y el lado desigual 10 cm.

32. Halla la medida de la diagonal de un rectángulo de lados 6 y 8 cm.

33. Un futbolista entrena corriendo la diagonal del terreno de juego de un campo de fútbol, ida y vuelta, 30 veces todos los días. ¿Qué distancia total recorre? El terreno de juego tiene unas medidas de 105 x 67 m.



Para saber más

La **torre Eiffel** fue construida con 18000 piezas de hierro forjado y originalmente medía 300 m y pesaba 7300 toneladas. Es una **estructura muy ligera**, una maqueta exacta de la torre, también de hierro, de **2 m de altura** pesaría sólo:

$(2/300)^3 \cdot 7300 =$

0,00216 TN=

2,16 Kg.

La sandía superior cuesta 2,50 €. La sandía inferior es justamente el **doble de ancha** que la superior. ¿Cuánto cuesta? ¿Costará 5 €, o será más cara?

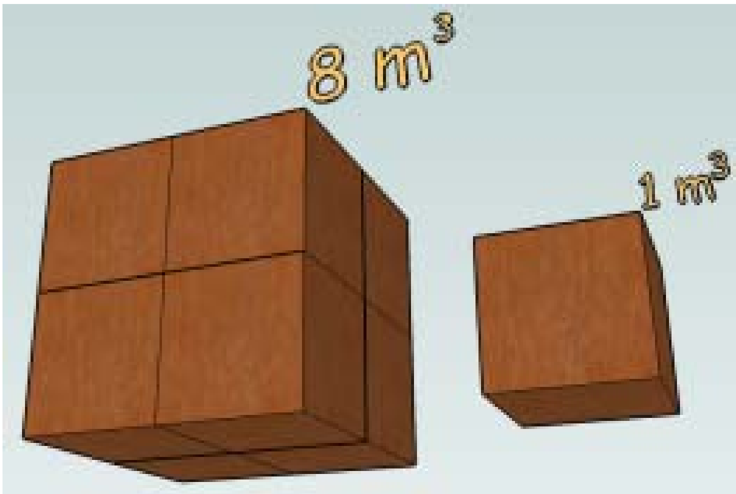
Una sandía el **doble de ancha** tiene 2^3 = **8 veces más volumen**. No costaría 5 €, sino 8·2,50= **20 €**

Relación entre los volúmenes de cuerpos semejantes

Los dos cuerpos de la imagen son semejantes. **La razón de semejanza es r=2.** Cualquier segmento en el cubo grande será el doble de grande que su correspondiente en el pequeño. ¿Qué relación hay entre sus volúmenes? Como puedes observar, **el volumen del cubo grande** no es el doble que el del pequeño sino **8 veces mayor** que el de éste.

$$r=2$$

$$R\ vol = r^3 = 2^3 = 8$$



Razón entre volúmenes

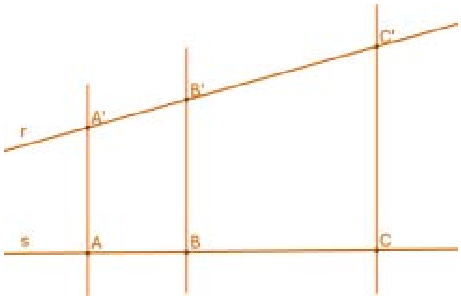
=

(Razón de semejanza)^3

Recuerda lo más importante

Teorema de Tales

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos secantes r y s, **los segmentos que determinan dichas paralelas en la recta r son proporcionales a los segmentos que**



$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

Figuras semejantes

Dos figuras son **semejantes** si sus segmentos correspondientes, o asociados, son proporcionales y sus ángulos iguales. Es decir; o son iguales, **o tienen "la misma forma" y sólo se diferencian en su tamaño**.

Cada longitud en una de las figuras se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo que se llama **razón de semejanza.**

En las representaciones de objetos esta razón se llama **factor de escala**

Criterios de semejanza de triángulos

1. Tienen dos ángulos iguales.

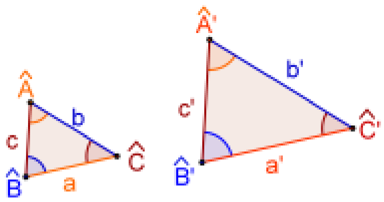
$\hat{A}=\hat{A}'$ y $\hat{B}=\hat{B}'$

2.- Sus lados son proporcionales.

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

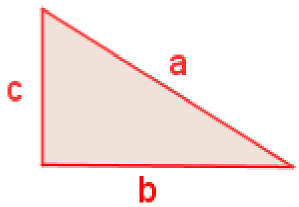
3.- Tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual.

$\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$ y $\hat{A}=\hat{A}'$

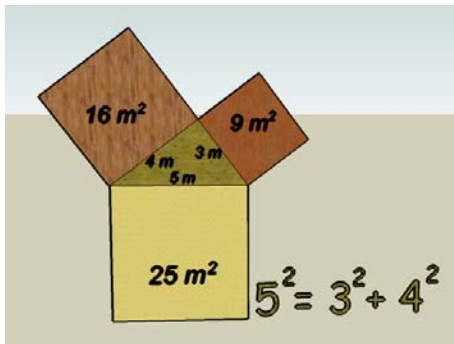


Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras da una relación entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo:

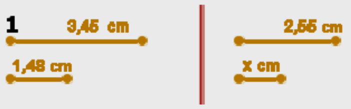


$$a^2 = b^2 + c^2$$

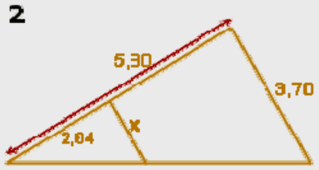


En todo triángulo rectángulo se verifica que **el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.**

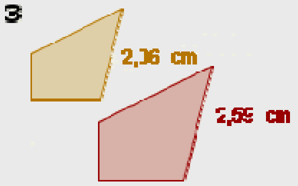
Autoevaluación



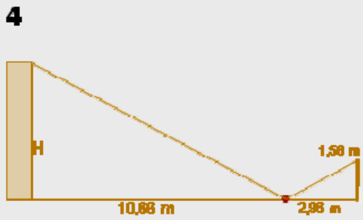
1. Calcula el valor de x para que los dos segmentos sean proporcionales.



2. Calcula, de forma razonada, el valor de x.



3. Los dos polígonos de la imagen son semejantes. Calcula la razón de semejanza.

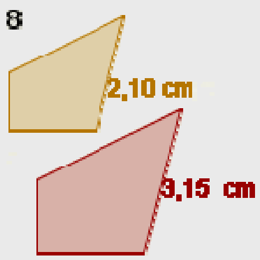


4. Un observador, erguido, ve reflejada en un espejo, que está situado en el suelo, la parte más alta de un edificio. Calcula la altura del edificio sabiendo que la altura del observador, desde sus ojos al suelo, es 1,58 m, el espejo está situado a 2,96 m del observador y a 10,66 m del edificio.

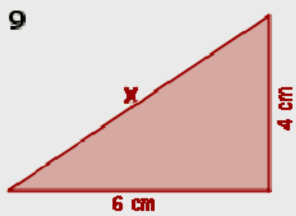
5. Determina la altura del edificio sabiendo que proyecta una sombra de 11,14 m al mismo tiempo que un bastón de 1,61 m proyecta una sombra de 2,56 m.

6. En un mapa, a escala 1:10000, la distancia entre dos pueblos es 10,6 cm. ¿A qué distancia, en Km., están en la realidad?

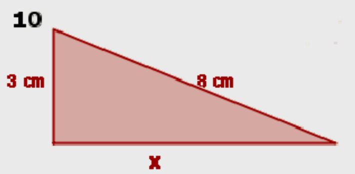
7. La distancia en un mapa entre dos pueblos, que en la realidad están a 22,4 Km., es de 11,2 cm. ¿Cuál es la escala del mapa?



8. Las dos figuras de la imagen son semejantes. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?



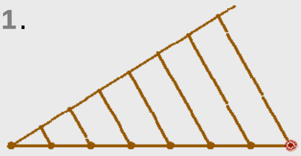
9. Usando el teorema de Pitágoras, calcula la longitud de la hipotenusa del triángulo que aparece en la imagen.



10. El triángulo de la imagen es rectángulo. Calcula x.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1.



2. 6,67cm

3. 4,87

4. 5,2 x 7,8 cm

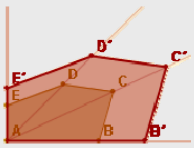
5. Sí. Tienen sus ángulos iguales. r=1,5

6. 1'5, 3'5 y 4 cm

7. 6,48 cm,r=1,35

8. r=10,67. 42'67, 74'69 y 85'36 cm

9.



10. No. Sus lados no son propor-cionales.

11. Sí. Tienen sus ángulos iguales.

12. a) Sí, crit. 3

b) Sí, crit. 2.

13. 39,59 m.

14. 5,57 m

15. 306 m^2

16. 2 personas

17. Sí, tienen sus ángulos iguales. No, no tienen por qué cumplir los criterios.

18. Sí, porque tienen los lados prop. y los ángulos iguales.

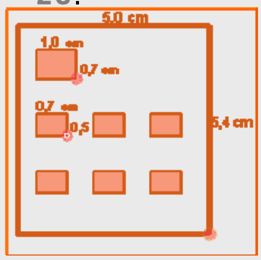
19. 5,25 Km

20. 1:500.000

21. 3x2 cm

22. 1:50

23.



24. 7 x 5,4 x 4 m

25. 300 m^2

26. 22,5 Km

27. 5,98 m

28. 120 cm

29. No, porque sus lados no verifican el teorema de Pitágoras.

30. 4,33 cm

31. 15,2 cm

32. 10 cm

33. 7.47 Km

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 1'09 cm
2. 1'69
3. 1'26
4. 5'69 m
5. 7'01 m
6. 1'06 Km
7. 1:20.000
8. 2'25
9. 7'21 cm
10. 7'42 cm

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

8

Cuerpos geométricos.

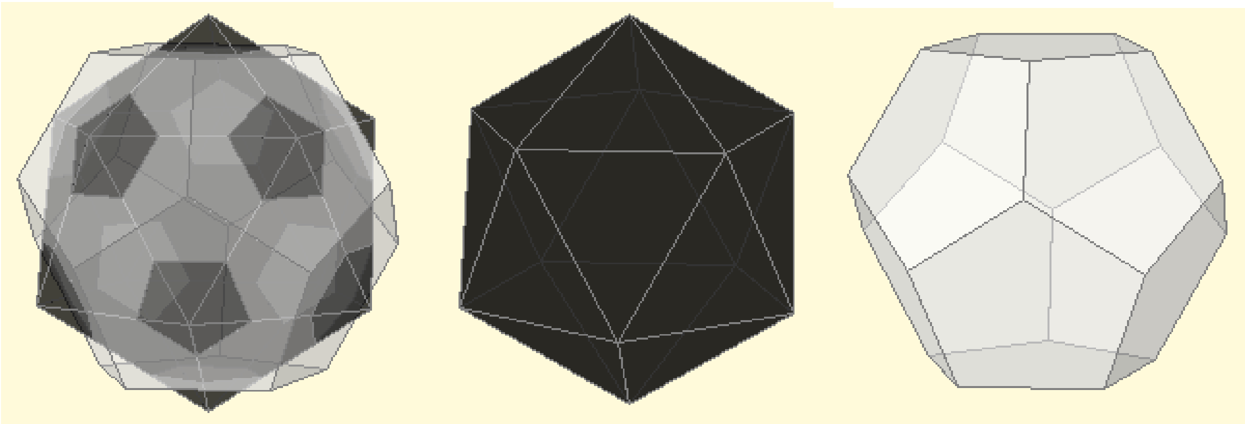
Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Identificar que es un poliedro.
- Determinar los elementos de un poliedro: Caras, aristas y vértices.
- Clasificar los poliedros.
- Especificar cuándo un poliedro es un prisma o una pirámide.
- Distinguir los poliedros regulares convexos también denominados sólidos platónicos.
- Construir los poliedros a partir de su desarrollo plano.
- Diferenciar y catalogar algunos sólidos de revolución: Cilindro, Cono y esfera.
- Resolver problemas geométricos aplicando el Teorema de Pitágoras.

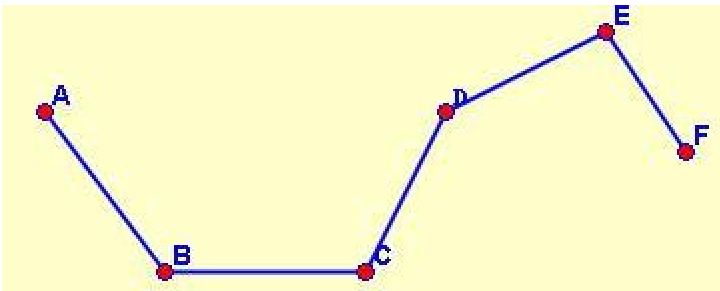
Antes de empezar

Un balón de fútbol se puede construir con polígonos regulares: 12 pentágonos y 20 hexágonos. Aquí puedes observar como se obtienen estos intersecando un icosaedro y un dodecaedro.



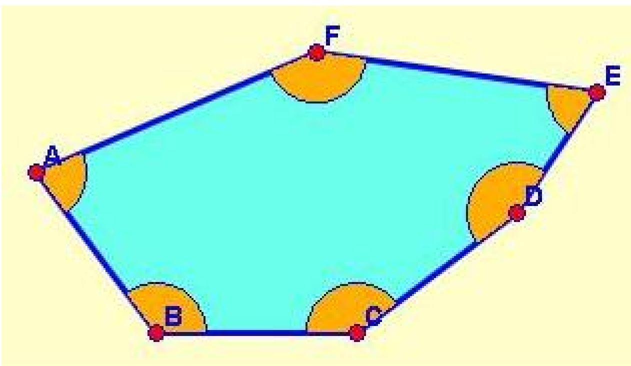
Recuerda

Una **línea poligonal** es un conjunto de **segmentos concatenados** y pueden ser: **abiertas** o **cerradas**



Línea poligonal

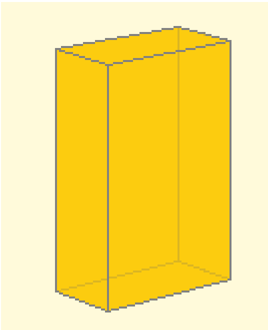
La **superficie** contenida por una **línea poligonal cerrada** se llama **polígono**. Los polígonos pueden ser **cóncavos** o **convexos**



Este polígono es convexo ya que sus ángulos interiores son menores que 180°

1. Poliedros

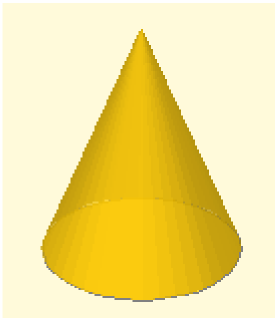
Definición



Un poliedro es un cuerpo geométrico tridimensional cuyas caras son polígonos. Cada uno de ellos es una **cara**.

El significado de **poli** es mucho y de **edro** es cara, por tanto poliedro significa muchas caras.

En la imagen de la izquierda tenemos un poliedro con seis caras que son rectángulos.

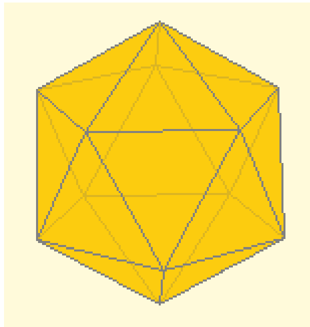


Por el contrario si al menos una de las superficie que delimitan a un sólido **no** es un polígono entonces **no es un poliedro**.

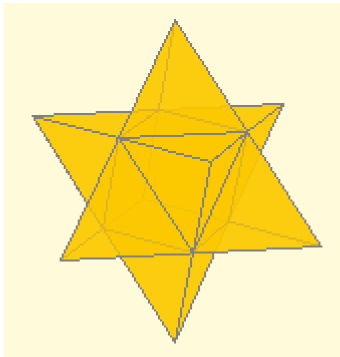
Eso es lo que ocurre en la imagen de la derecha donde la base es un círculo, lo que basta para afirmar ya que no es un poliedro, pero aquí adicionalmente la cara lateral no es plana. (Recuerda que un polígono es plano)

Un **ángulo diedro** es la región del espacio delimitada por dos semiplanos.
Un ángulo diedro es **convexo** si es menor que un llano y en caso contrario se dice que es **cóncavo**

Los poliedros pueden ser **convexos** o **cóncavos**. Es convexo si todos los ángulos diedros son convexos. Basta con que uno de ellos sea mayor que un llano para que el poliedro sea cóncavo.

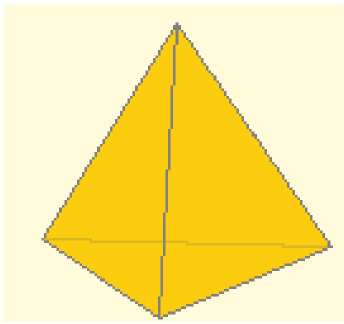


Poliedro convexo



Poliedro cóncavo

Ejercicio resuelto: El poliedro de la figura de la derecha es el tetraedro y...



a) todos los tetraedros son convexos

b) tiene cuatro caras y es cóncavo

c) es un cuerpo redondo

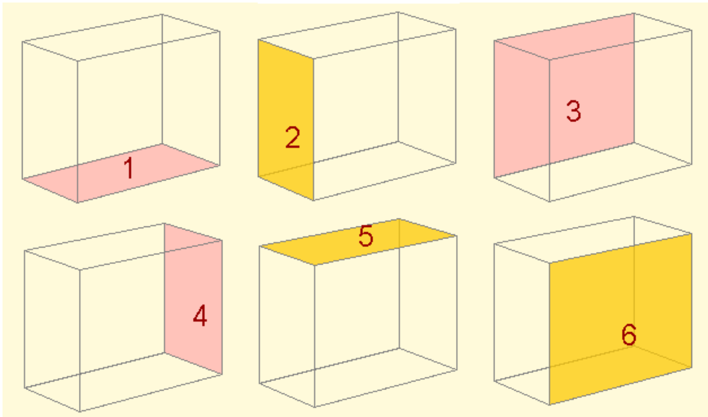
Solución: **a)** Por ser todos los ángulos diedros convexos.

1. Poliedros

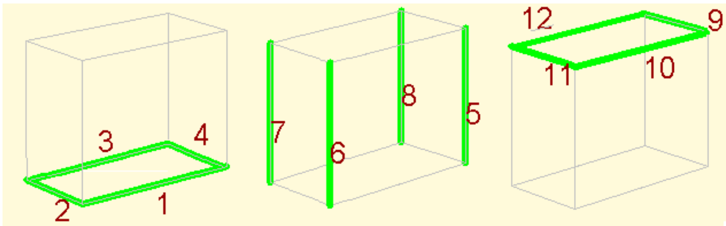
Elementos de un poliedro.

En un poliedro podemos distinguir los siguientes elementos:

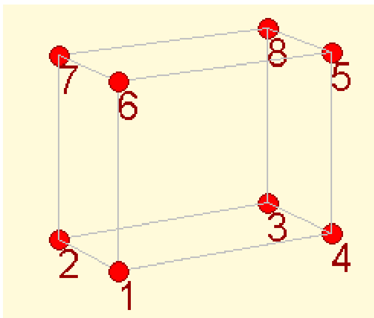
- **Caras**: son los polígonos que forman el poliedro.



- **Aristas**: son los segmentos en los que se intersecan (cortan) las caras.

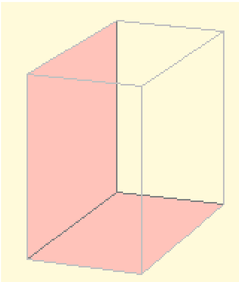


- **Vértices**: son los puntos donde se intersecan las aristas.



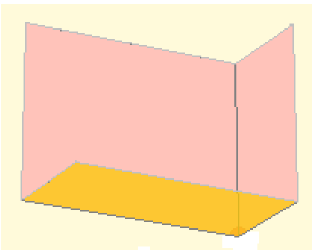
Vértices de un poliedro

Además podemos citar los **ángulos diedros** delimitados por dos caras que se cortan. Hay tantos como **número de aristas**.

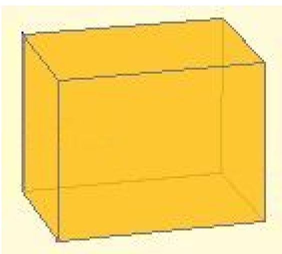


En la figura se muestra un ángulo diedro.

Y los **ángulos poliedros** determinados por las caras que inciden en un mismo vértice. Hay tantos como **número de vértices**.



Arriba se muestra un ángulo poliedro.



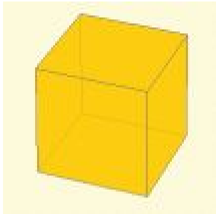
En esta figura (ortoedro) encontramos **12** ángulos diedros y **8** ángulos poliedros.

2. Tipos de poliedros

Prismas

Un prisma es un poliedro determinado por:

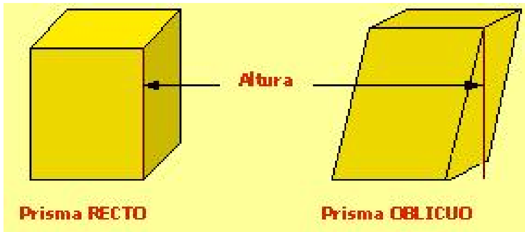
- las **bases**: dos caras paralelas que son polígonos iguales.
- tantas **caras laterales**, que son paralelogramos, como lados tienen las bases.



Prisma cuya base tiene 4 lados

A los prismas se les **clasifica** según el número de lados de sus bases: triangular (3 lados), cuadrangular (4 lados), pentagonal (5 lados), exagonal (6 lados), etc.

La **altura** del prisma es la distancia entre las bases. Si la altura coincide con las aristas laterales el prisma es recto, en caso contrario es oblicuo.



Las caras laterales de los prismas rectos son rectángulos.

Un prisma es **convexo** o **cóncavo** si respectivamente sus bases son polígonos convexos o cóncavos.

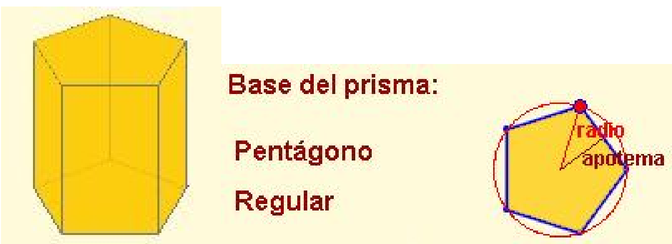
Prismas regulares.

Un prisma recto es **regular** si sus bases son polígonos regulares.

Recuerda:
- un polígono es regular si tiene todos sus lados y ángulos iguales.
- todo polígono regular se puede **inscribir** en una circunferencia

Al ser regulares las bases podemos **referenciar** el **radio** de la circunferencia circunscrita y la **apotema** de la base.

Por ejemplo, en un prisma pentagonal regular



La base es un pentágono regular. Se muestra la apotema y el radio de la circunferencia circunscrita

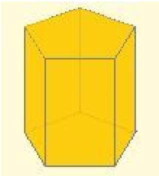
2. Tipos de Poliedros

Desarrollo de un prisma.

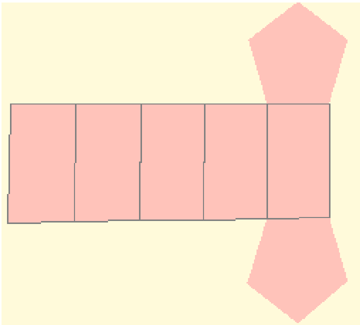
Todos los prismas son **desarrollables**, es decir, sus caras pueden ubicarse en un plano y mediante pliegues se puede construir el prisma.

El desarrollo de un prisma recto está compuesto por sus dos bases y por un rectángulo que tiene tantas divisiones como número de caras laterales.

En la figura de la izquierda se puede observar un prisma recto pentagonal y su desarrollo



Prisma recto pentagonal y su desarrollo



¿Como sería el desarrollo de un prisma oblicuo?

Paralelepípedos.

Los paralelepípedos son prismas en los que **todas** sus caras son paralelogramos.

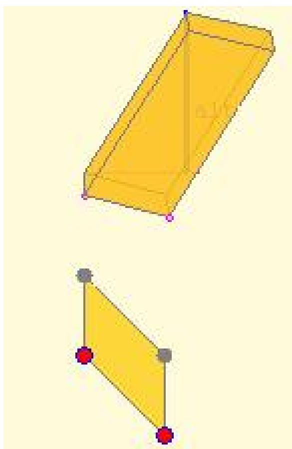
Son prismas **cuadrangulares**.

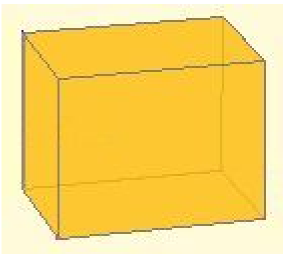
Es **recto** si la altura coincide con las aristas, en caso contrario son **oblicuos**.

Entre ellos destacamos cuatro en particular:

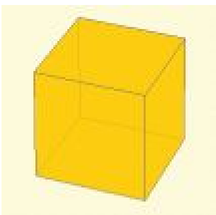
- Ortoedro: sus caras son rectángulos.
- Cubo: sus caras son cuadrados.
- Romboedro: Todas sus caras son rombos.
- Romboiedro: Todas sus caras son romboides.

En la figura se muestra éste último y un detalle de la base.

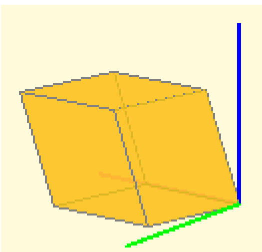




Ortoedro: las caras son rectángulos. (Orto=perpendicular; edro=cara)



Cubo: las caras son cuadrados. (Es un caso particular del ortoedro)



Romboedro: las caras son rombos (Sus 6 caras son iguales)

Preguntas tipo test sobre PRISMAS resueltas

1. En los prismas inclinados:
   a. Todas las caras son rectangulares.
   b. Alguna cara puede ser un rectángulo.
   c. Ninguna cara puede ser rectangular.

   b) Las caras de los prismas deben ser paralelogramos y en particular puede tener alguna cara rectangular.

2. Un ortoedro tiene:
   a. Todas sus caras pentagonales.
   b. Todas sus caras iguales.
   c. Todas sus caras perpendiculares entre sí.

   c) Todas las caras del ortoedro son rectángulos, y por tanto son perpendiculares.

3. Un cubo es:
   a. Un pentaedro.
   b. Un tetraedro.
   c. Un exaedro.

   c) Tiene 6 caras. (Recuerda: “edro” significa cara y “exa” seis)

4. Todos los prismas tienen:
   a. El doble de vértices que lados tiene una base
   b. El mismo número de vértices que lados tiene una base
   c. Tantos vértices como números de lados de una base más dos.

   a) Los vértices del prisma están en las bases y hay 2 bases.

5. Si las caras laterales de un prisma son rectángulos:
   a. Es recto.
   b. Es oblicuo.
   c. Es un ortoedro

   a) La única posibilidad para que todas las caras laterales sean rectángulos es que el prisma sea recto.

6. Los paralelepípedos:
   a. Pueden ser prismas triangulares.
   b. Han de ser prismas cuadrangulares.
   c. No tienen por qué ser prismas cuadrangulares.

   b) Para que pueda haber paralelismo dos a dos caras ha de ser cuadrangular

7. Si las bases un prisma son rectángulos:
   a. Puede ser un romboedro.
   b. Es recto.
   c. Puede ser oblicuo.

   c) La base puede ser rectangular y la altura NO coincidir con la arista.

8. Un prisma pentagonal tiene:
   a. Quince caras, diez aristas y siete vértices.
   b. Diez caras, siete aristas y quince vértices
   c. Siete caras, quince aristas y diez vértices.

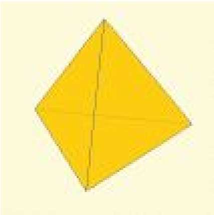
   c) El número de caras laterales coincide con los lados de las bases. Si le añadimos las 2 bases el total es 7 caras.

2. Tipos de Poliedros

Pirámides.

Una pirámide un poliedro determinado por:

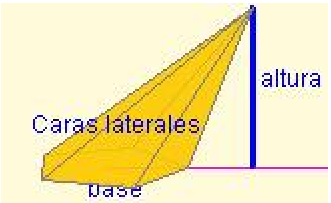
- Una cara poligonal denominada base.
- Tantas caras **triangulares** como lados tiene la base.



Pirámide de base triangular

El punto donde convergen todos los triángulos se denomina vértice o cúspide.

La altura de una pirámide es la distancia del vértice a la base.



Altura de una pirámide

Una pirámide es **convexa** o **cóncava** si su base es un polígono convexo o cóncavo respectivamente.

La definición de pirámide recta u oblicua es algo más compleja que en el caso de los prismas y es relativa al centro de gravedad o centroide del polígono base.

Pirámides regulares.

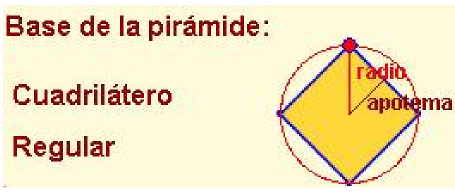
Una pirámide es **regular** si todas las caras laterales son iguales.

Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles.

A la **altura** de estos triángulos se le denomina **apotema** de la pirámide.

La apotema es la altura de los triángulos isósceles de las caras de la pirámide. NO se debe confundir con la altura de la pirámide.

La base es un polígono regular y por tanto podemos **referenciar** el radio de la circunferencia circunscrita y la apotema de la base.



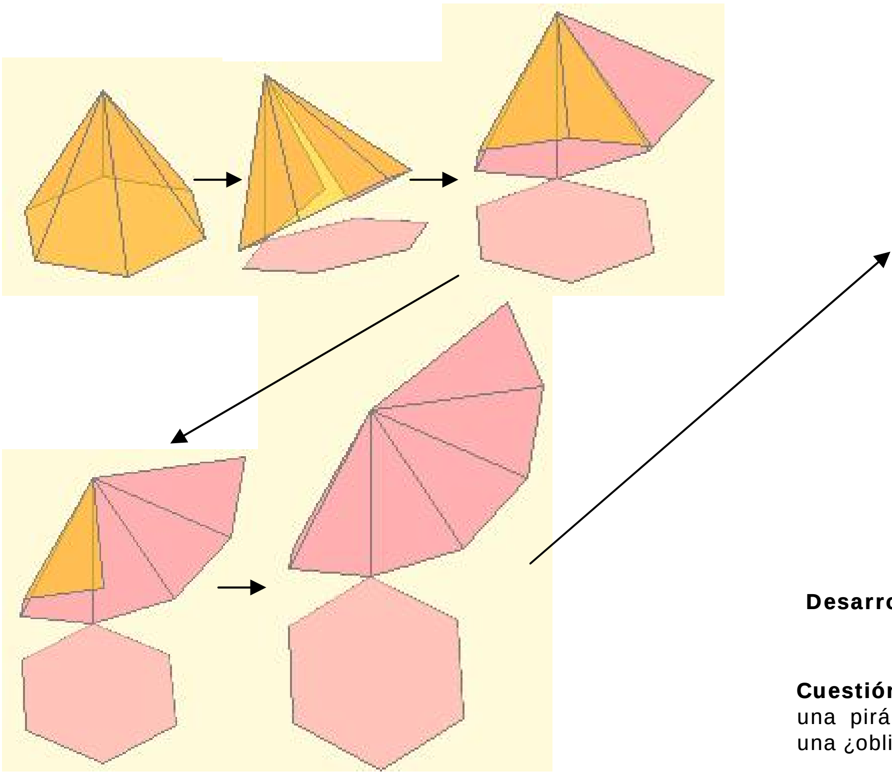
Apotema y radio de la circunferencia circunscrita en una pirámide de base cuadrada

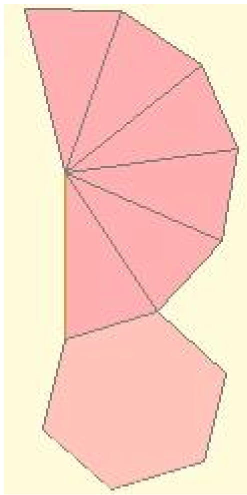
2. Tipos de poliedros

Desarrollo de una pirámide.

Todas las pirámides son desarrollables, es decir, pueden sus caras ubicarse en un plano y mediante pliegues se puede construir dicha pirámide.

En las figuras se puede observar como se puede obtener un desarrollo de una pirámide regular.





Desarrollo completo de una pirámide exagonal

Cuestión: ¿Como sería el desarrollo de una pirámide recta no regular? Y el de una ¿oblicua?

Poliedros regulares.

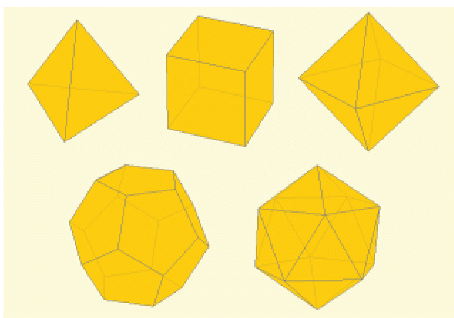
Un poliedro es **regular** si todas sus caras son iguales y sobre cada vértice inciden el mismo número de caras y aristas.

Hay sólo **cinco** poliedros regulares convexos: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

A los poliedros convexos regulares se le denominan también como **sólidos platónicos** pues en la Grecia clásica fueron objeto de estudio por Platón.

Poliedro regular	Caras	Vértices	Aristas
Tetraedro	4	4	6
Cubo	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

Tetraedro **Cubo** **Octaedro**



Dodecaedro **Icosaedro**

Sólidos platónicos

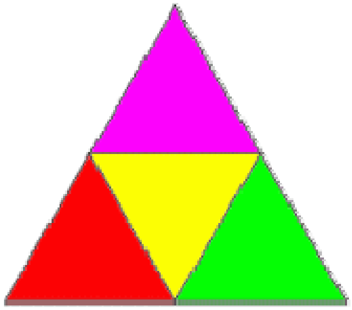
2. Tipos de Poliedros

Desarrollo Poliedros regulares.

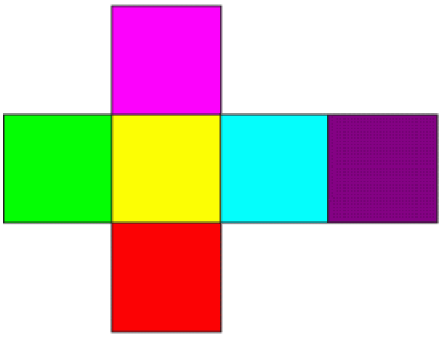
Todos los poliedros son **desarrollables**, es decir, pueden sus caras ubicarse en un plano y mediante pliegues se pueden construir.

En las figuras podemos observar algunos desarrollos posibles de cada uno de los poliedros convexos regulares.

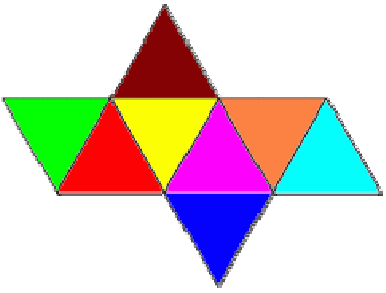
Recuerda que a los poliedros convexos regulares se le denominan también como **sólidos platónicos** pues en la Grecia clásica fueron objeto de estudio por Platón.



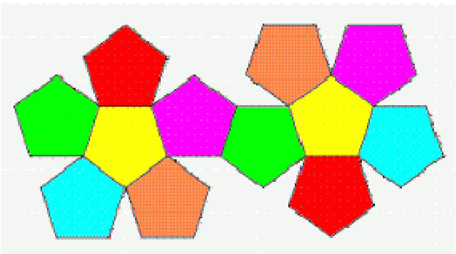
Desarrollo del tetraedro



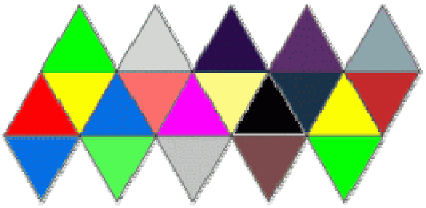
Desarrollo del cubo



Desarrollo del octaedro



Desarrollo del dodecaedro



Desarrollo del icosaedro

Preguntas tipo test sobre prismas REGULARES resueltas

1. En el octaedro inciden en cada vértice:
   a. Tres caras.
   b. Cuatro caras.
   c. Cinco caras.

   b) Inciden 4 caras

2. Poliedros regulares con caras triangulares hay:
   a. Tres.
   b. Uno.
   c. Dos.

   a) El tetraedro, el octaedro y el icosaedro.

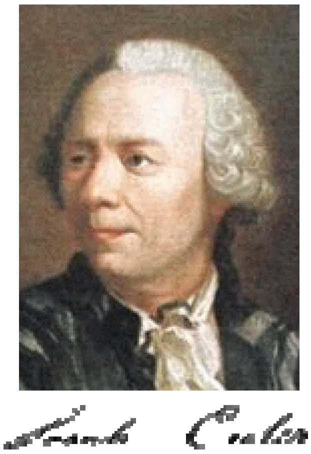
2. Tipos de poliedros

Relación de Euler.

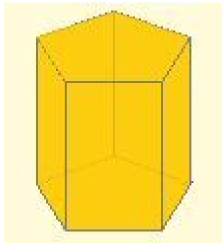
Euler demostró que en un poliedro se mantiene la relación:

C + V = A + 2

donde C : número de caras, V : número de vértices y A: número de aristas del prisma.



Vemos en el ejemplo cómo se cumple la relación de Euler:



Prisma de base pentagonal:
C = 7; V = 10; A = 15
C + V = 17 = A + 2

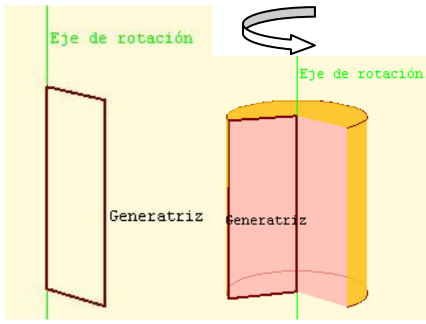
3. Cuerpos redondos

Cilindro.

Un **cilindro** recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. La recta en la que se sitúa el lado sobre el que gira se denomina **eje de rotación** y el lado paralelo a él es la **generatriz**.

En un cilindro distinguimos la **superficie lateral** y **dos bases** que son dos círculos iguales.

La **altura** del cilindro es la distancia entre las dos bases. En un cilindro recto la altura y la generatriz miden lo mismo

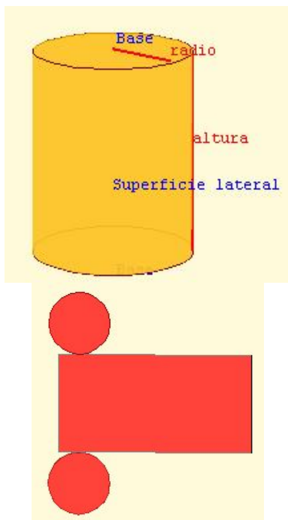


Generación del cilindro

Desarrollo del cilindro.

La superficie del cilindro es desarrollable en el plano. Este desarrollo se compone de:

- dos círculos iguales cuyo radio es el radio del cilindro: r.
- un rectángulo cuya base tiene por longitud el perímetro del círculo de las bases: $2\pi r$, y de altura la del cilindro.



Desarrollo del cilindro

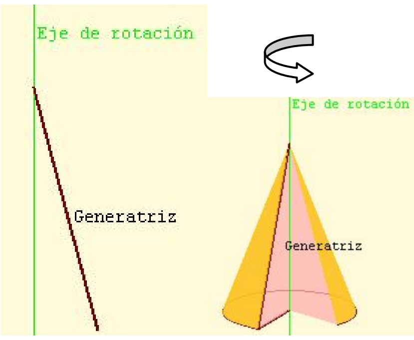
3. Cuerpos redondos

Cono.

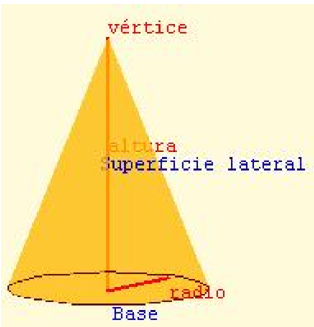
Un **cono recto** es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos. La recta en la que se sitúa el lado sobre el que gira se denomina **eje de rotación** y la hipotenusa es la **generatriz**.

En un cono distinguimos la **superficie lateral** y la **base** que es un círculo. El punto donde convergen las generatrices es el **vértice**.

La altura del cono recto es la distancia del vértice a la base.



Generación del cono



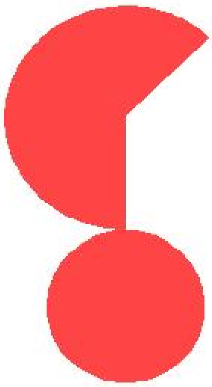
Elementos del cono

Desarrollo del cono.

Un cono es un sólido de revolución que se puede **desarrollar** en el plano.

El desarrollo de su cara lateral es un sector circular y la base es un círculo.

El radio del sector circular es la generatriz del cono y la longitud de su arco es el perímetro de la base: $2\pi r$, donde r es el radio de ésta.



Desarrollo del cono

Investiga

¿Cómo sería el desarrollo de un cono inclinado?

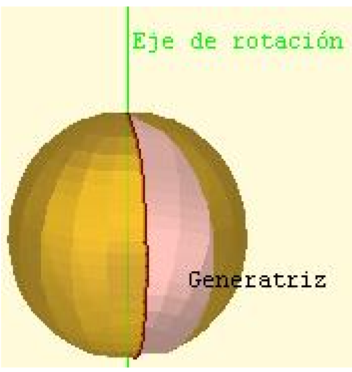
Puedes consultar en los contenidos del "Proyecto: El metro" en concreto mira el objeto 48: "Conos generalizados".

http://descartes.cnice.mec.es/web_HEDA/Elmetro/

Esfera.

La esfera es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un semicírculo (o un círculo) alrededor del diámetro. La recta en la que se sitúa éste es el eje de revolución y la semicircunferencia la generatriz.

La superficie esférica **no es desarrollable** en el plano.



Generación de la esfera

Preguntas tipo test sobre cuerpos redondos resueltas

1. Un cono:
   - a. No tiene base.
   - b. Tiene dos bases.
   - c. Tiene una base.

c) Un cono tiene una base que es un círculo.

2. Un cono:
   - a. No tiene ningún vértice.
   - b. Tiene varios vértices.
   - c. Tiene un vértice.

c) Es el punto donde convergen las generatrices.

3. Un cilindro se obtiene al girar:
   - a. Una circunferencia alrededor de un diámetro.
   - b. Un triángulo rectángulo alrededor de un cateto.
   - c. Un rectángulo alrededor de un lado.

c) Un cilindro recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados

4. El desarrollo de la cara lateral del cilindro es:
   - a. Dos círculos
   - b. Un sector circular
   - c. Un rectángulo

c) un rectángulo cuya base tiene por longitud el perímetro del círculo de las bases: $2\pi r$, y de altura la del cilindro

5. La generatriz del cono:
   - a. Es mayor que su altura.
   - b. Es igual que su altura.
   - c. Es menor que su altura

a) La altura es un cateto de un triángulo rectángulo, mientras que la generatriz es la hipotenusa, por tanto, mayor.

6. Un cilindro:
   - a. No tiene base.
   - b. Tiene dos bases.
   - c. Tiene una base.

b) Un cilindro tiene dos bases que son círculos

7. Un cilindro:
   - a. No es un poliedro.
   - b. Según se mire puede ser un poliedro.
   - c. Si es un poliedro.

a) En un poliedro las caras son polígonos. Las bases del cilindro son círculos, que no son polígonos.

8. Al aumentar el radio de un cono:
   - a. No varía el sector circular de su desarrollo lateral.
   - b. Disminuye el sector circular de su desarrollo lateral
   - c. Aumenta el sector circular de su desarrollo lateral.

c) la longitud del arco es el perímetro de la base: $2\pi r$, donde r es el radio de ésta

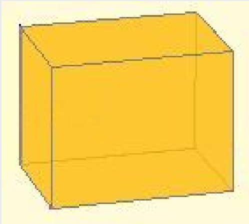
EJERCICIOS resueltos

Prismas, pirámides, poliedros regulares, relación de Euler

Sobre PRISMAS

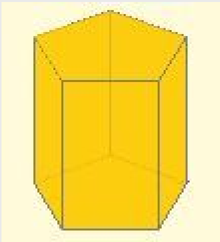
1.1 Dibuja un prisma recto de base rectangular

Al ser un prisma recto las caras laterales son rectángulos y, puesto que las bases son también rectángulos el prisma pedido es el de la figura: un ortoedro



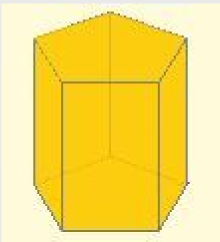
1.2 El número de aristas de un prisma es 15 ¿Qué polígono son las bases?

El número de aristas de un prisma es siempre el triple de las aristas de cada base. Si son 15 entonces cada base tiene 5. El prisma es pentagonal.



1.3 Un prisma tiene 10 vértices ¿Qué polígono tiene por bases?

El número de vértices de un prisma es siempre el doble de los vértices de cada base. Si son 10 entonces cada base tiene 5. El prisma es pentagonal.



Sobre PIRÁMIDES

2.1 Dibuja una pirámide exagonal regular

Una pirámide exagonal tiene por base un exágono cuyos lados son iguales. Las caras laterales serán triángulos isósceles. La pirámide pedida es la de la figura, si bien puede tener la altura que quieras, pues la regularidad es por la base.

EJERCICIOS resueltos (continuación)

2.2 Averigua el polígono de la base de una pirámide si tiene 5 vértices.

Una pirámide tiene siempre un vértice más que los vértices de la base. Si en total tiene 5, la base tiene 4. Es una pirámide cuadrangular.

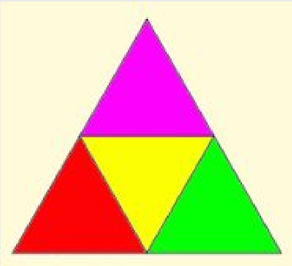
2.3. Averigua el polígono de la base de una pirámide si tiene 12 aristas.

Una pirámide tiene el doble de aristas que lados tiene la base. Si en total tiene 12 aristas la base es un exágono. Es una pirámide exagonal.

Sobre POLIEDROS REGULARES

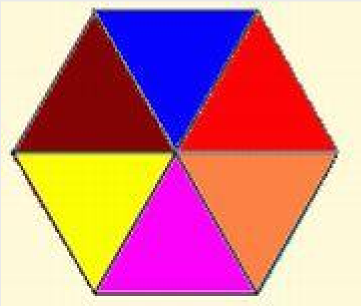
3.1 Dibuja el desarrollo de un tetraedro de lado 3 cm.

Un tetraedro tiene cuatro caras que son triángulos equiláteros. En la figura tienes su desarrollo plano.



3.2. ¿Puede existir un poliedro regular con 6 triángulos equiláteros en cada vértice?

Fíjate en la figura. Si en un vértice inciden 6 triángulos equiláteros no podríamos doblarlos para formar un poliedro. No tenemos margen para construir un ángulo poliedro.



EJERCICIOS resueltos (continuación)

Sobre la RELACIÓN DE EULER

4.1 Un poliedro euleriano, ¿puede tener el mismo número de caras y de aristas?

No es posible. Si es un poliedro euleriano debe cumplir la relación de Euler:

Caras + Vértices = Aristas + 2.

Si el número de caras es igual que el de aristas, entonces el número de vértices sería 2.

¿Un poliedro de 2 vértices?

4.2. Comprueba que se cumple la relación de Euler en un prisma cuya base es un heptágono.

En un prisma heptagonal la base tiene siete vértices, por tanto:

a) Un prisma tiene el doble de vértices que su base, lo que hará 14 vértices.

b) Un prisma tiene el triple de aristas que vértices tiene la base, tendrá por tanto 21 aristas.

c) Un prisma tiene dos caras más que vértices tiene su base, luego tendrá 9 caras.

Así pues la relación de Euler

Caras + Vértices = Aristas + 2, tendríamos que:

9 + 14 = 23 + 2 = 23.

Luego se cumple la relación de Euler.

Sólidos de revolución, cilindro, cono, esfera

Sobre SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

1.1 El cartón de un rollo de papel tiene un diámetro de 4,6 cm. y una altura de 9,7 cm. ¿Qué dimensiones tiene el desarrollo plano del cartón?

El desarrollo plano es un rectángulo. Sus dimensiones serán:

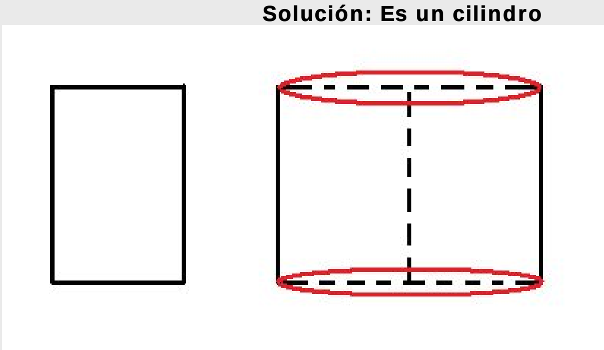
Alto: la altura del rollo (cilindro): 9,7 cm.

Largo: el perímetro de la circunferencia: diámetro·π = 4,6·π.

Si aproximamos π por 3,14, tendríamos que el largo sería aproximadamente 14,44 cm.

1.2 ¿Qué figura del espacio se genera al girar el rectángulo inferior alrededor de su lado derecho?

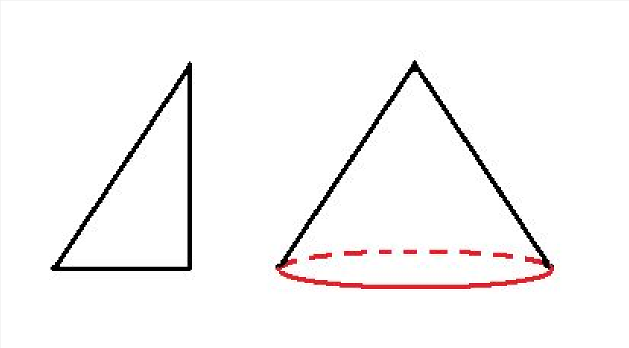
Solución: Es un cilindro



EJERCICIOS resueltos (continuación)

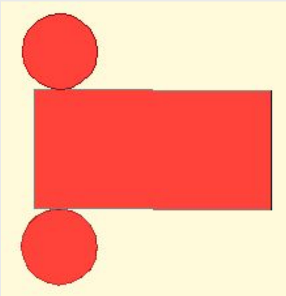
1.3. ¿Qué figura del espacio se genera al girar el triángulo dibujado abajo alrededor de su altura?

Solución: Es un cono



Sobre CILINDROS

2.1. Dibuja el desarrollo de un cilindro de 2 cm. de radio y 7 cm. de altura

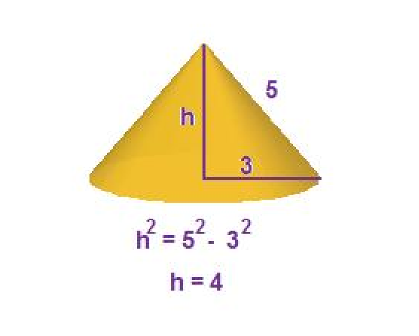


El rectángulo tiene 7 cm. de altura y de base 2·π·radio cm.
El círculo 4 cm. de diámetro

Sobre CONOS

3.3. Calcula la altura de un cono si la generatriz mide 5 cm y el radio de la base es de 3 cm.

En la figura está calculada la altura. Nos basamos en el teorema de Pitágoras.



Sobre ESFERAS

4.1 Dibuja el desarrollo plano de la superficie esférica

No es posible. La superficie esférica no es desarrollable. Si tomas un trozo suficientemente grande de la piel de una naranja y lo apoyas en la mesa verás que al aplastarla se rompe.

Para practicar

Prismas, pirámides, poliedros regulares, Euler

Ejercicios sobre prismas

1.1 Dibuja un prisma oblicuo de base triangular

1.2 El número de vértices de un prisma es 20 ¿Cuántas caras tiene?

1.3 Un prisma tiene 18 aristas. ¿Qué polígono tiene por bases?

1.4 Un prisma tiene 9 caras. Por tanto es un prisma...

1.5 Un prisma tiene 15 vértices, por lo tanto las bases son...

Ejercicios sobre pirámides

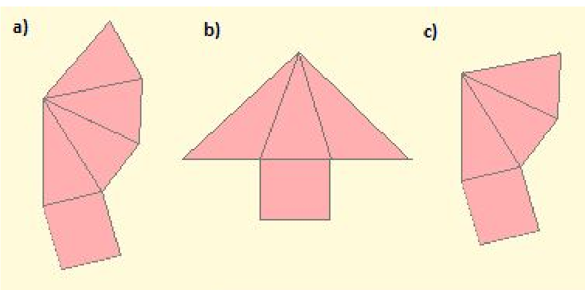
2.1 Dibuja una pirámide irregular de base triangular

2.2. Averigua el polígono de la base de una pirámide si tiene 5 caras laterales.

2.3. Averigua el polígono de la base de una pirámide si tiene 8 caras.

2.4. Dibuja el desarrollo de una pirámide que tiene todas sus caras iguales.

2.5.¿Cuál de las siguientes figuras es el desarrollo plano de una pirámide?



Ejercicios sobre poliedros regulares

3.1 Dibuja el desarrollo de un octaedro de lado 2 cm.

3.2. Dibuja el desarrollo plano de un cubo de lado 4 cm.

3.3. ¿Puede existir un poliedro regular cuyas caras sean octógonos?

3.4. ¿Cuántos lados como máximo puede tener como máximo las caras de un poliedro regular?

3.5. ¿Cuántas caras triangulares pueden incidir en un vértice de un polígono regular?

3.6. ¿Cuántas caras cuadradas pueden incidir en un vértice de un polígono regular?

Ejercicios sobre la relación de Euler

4.1 Un poliedro euleriano, ¿puede tener el mismo número de vértices y de aristas?

4.2. Comprueba que se cumple la relación de Euler en una pirámide cuya base es un octógono.

4.3. Comprueba que se cumple la relación de Euler en el icosaedro.

4.4. Comprueba que se cumple la relación de Euler en el dodecaedro.

4.5. Un poliedro euleriano tiene 20 caras y 36 vértices. ¿Cuántas aristas tiene?

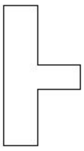
4.6. Un poliedro euleriano tiene 21 caras y 40 aristas. ¿Cuántos vértices tiene?

Para practicar

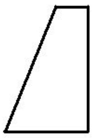
Sólidos de revolución, cilindros, conos, esferas.

Sobre sólidos de revolución

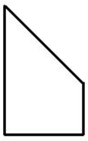
1.1 Dibuja el cuerpo de revolución que forma la figura de abajo al girar sobre el segmento lateral izquierdo.



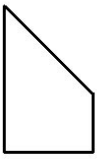
1.2. ¿Qué figura del espacio se genera al girar el trapecio dibujado abajo alrededor de su lado derecho?



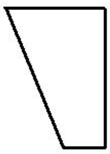
1.3. ¿Qué figura del espacio se genera al girar el trapecio dibujado abajo alrededor de su lado derecho?



1.4 ¿Qué figura del espacio se genera al girar el trapecio dibujado abajo alrededor de su lado izquierdo?

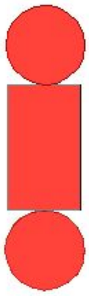


1.5. ¿Qué figura del espacio se genera al girar el trapecio dibujado abajo alrededor de su lado derecho?



Sobre cilindros

2.1. ¿Puede ser posible el desarrollo de la figura inferior el correspondiente a un cilindro?



2.2. Si cogemos un rectángulo ¿se obtiene el mismo cilindro doblándolo por la base o por la altura?

2.3. Queremos construir un bote cilíndrico que tenga 9 cm de alto y el radio de la base mida 1,5 cm. Dibuja su desarrollo plano.

Sobre conos

3.1 Dibuja el desarrollo de un cono con radio de la base 5 cm. y de generatriz 10 cm.

3.2. Cogemos un triángulo de base 4 cm. y altura 8 cm. Al girarlo sobre la altura obtenemos un cono. ¿Cuánto mide su generatriz?

3.3. El desarrollo plano de la cara lateral de un cono ¿Puede ser un círculo completo?

Sobre esferas

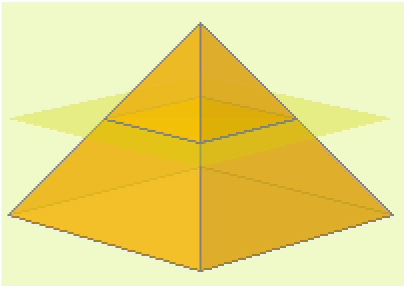
4.1 Al girar un cuarto de círculo por uno de los radios que lo limitan ¿Qué figura obtenemos?

4.2 Al girar un círculo alrededor de un eje exterior a él ¿Qué figura obtenemos?

4.3 ¿Qué forma tienen las gotas de agua?

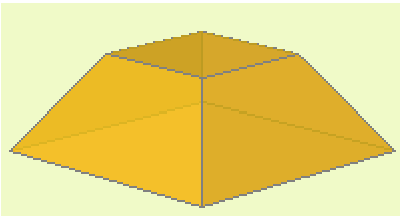
Para saber más

Tronco de pirámide y tronco de cono

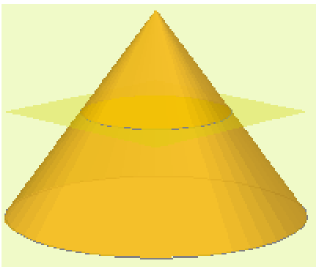


Si una pirámide la intersecamos con un plano paralelo a la base, obtenemos otra pirámide y otro poliedro denominado:

tronco de pirámide

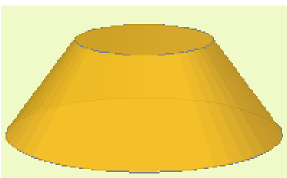


El tronco de pirámide tiene dos bases que son polígonos semejantes y las caras laterales son trapecios si la pirámide es recta o cuadriláteros si es oblicua



Si un cono lo intersecamos con un plano paralelo a la base, obtenemos otro cono y otro sólido de revolución denominado:

tronco de cono

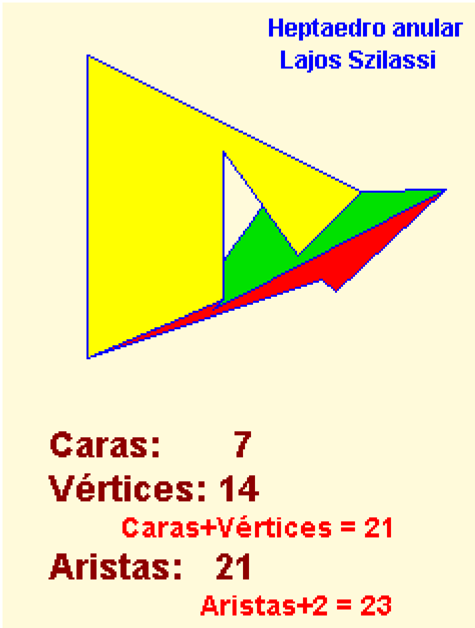


El tronco de cono tiene dos bases que son círculos y una cara lateral cuyo desarrollo es un sector de una corona circular

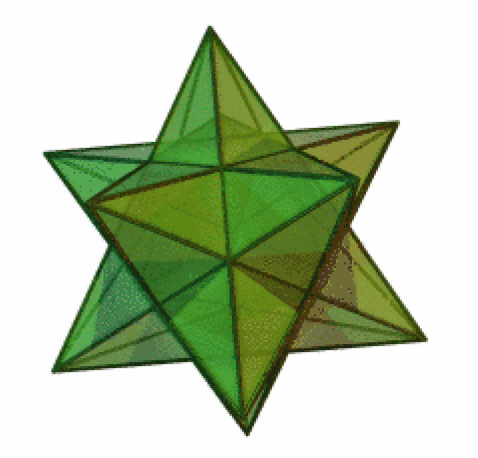
Poliedros no Eulerianos

Hay poliedros que no cumplen la Relación de Euler: Caras + Vértices = Aristas +2

Se corresponden con poliedros que tienen "agujeros".



Poliedros regulares cóncavos



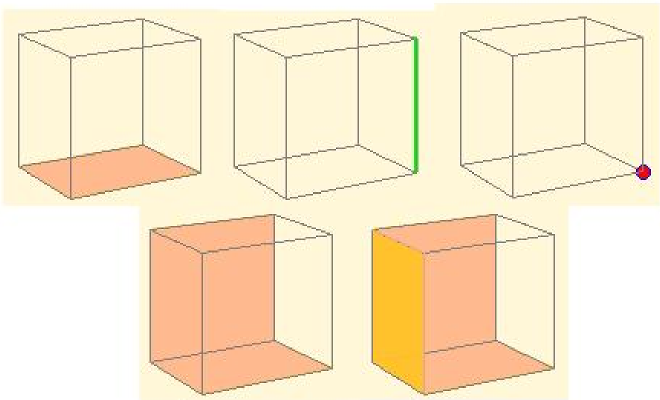
Un poliedro cóncavo se dice que es regular si todas sus caras son polígonos regulares y en cada vértice incide el mismo número de caras. Se les denomina **sólidos de Kepler-Poinsot**.

Recuerda lo más importante

Un poliedro es un cuerpo geométrico tridimensional cuyas caras son polígonos.

Elementos de un poliedro

caras aristas vértices



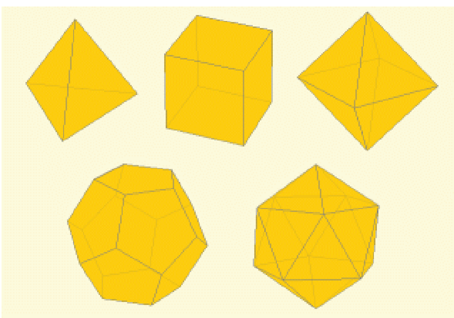
Ángulo diedro Ángulo poliedro

Poliedros regulares

Un poliedro es regular si todas sus caras son iguales y sobre cada vértice inciden el mismo número de caras y aristas.

Los poliedros regulares son cinco

Tetraedro Cubo Octaedro



Dodecaedro Icosaedro

Cuerpos redondos

Cilindro, cono y esfera son cuerpos de revolución

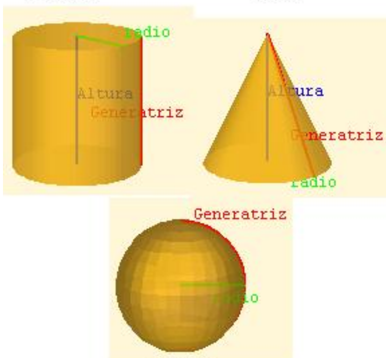
Tipos de poliedros.

Prismas

Pirámides

Relación de Euler

cilindro cono



esfera

Autoevaluación

1. Un prisma exagonal ¿cuántos vértices tiene?

2. Una pirámide pentagonal ¿cuántos vértices tiene?

3. Un prisma triangular ¿cuántas aristas tiene?

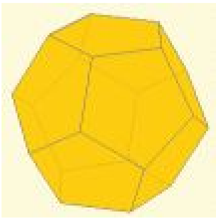
4. Una pirámide heptagonal, ¿cuántas aristas tiene?

5. Un poliedro convexo tiene 4 caras y 5 vértices, ¿cuántas aristas tiene?

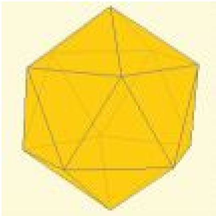
6. Un poliedro convexo tiene 9 caras y 18 aristas, ¿cuántos vértices tiene?

7. Un poliedro regular de 6 vértices, ¿cuál es?

8. El poliedro regular convexo de 12 caras, ¿cuál es?



9. ¿Cómo se denomina el poliedro representado en esta figura?

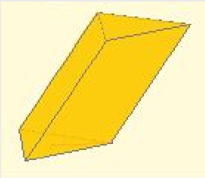


10. Indica si el sólido de la figura es desarrollable

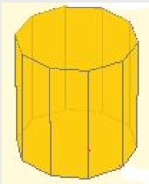
Soluciones de los ejercicios para practicar

PRISMAS

1.1 Al ser un prisma las caras laterales son paralelogramos. Las bases son triángulos y al ser oblicuo están desplazadas.

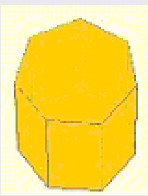


1.2. El número de vértices de un prisma es siempre el doble de los vértices de cada base. El prisma es decagonal, y por tanto tiene 12 caras.



1.3 El número de aristas de un prisma es siempre el triple de las aristas de cada base. El prisma es hexagonal.

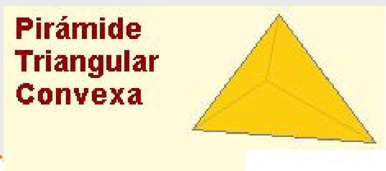
1.4 El número de caras de un prisma es el número de lados de la base más dos. Es un prisma heptagonal.



1.5 No hay ningún prisma que pueda tener un número impar de vértices.

PIRÁMIDES

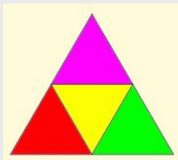
2.1



2.2 Una pirámide tiene tantas caras laterales como lados tiene la base. Es una pirámide pentagonal.

2.3 Una pirámide tiene siempre una cara más que lados tiene la base. Es una pirámide heptagonal.

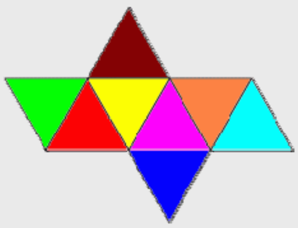
2.4 La única pirámide triangular con todas las caras iguales es el tetraedro.



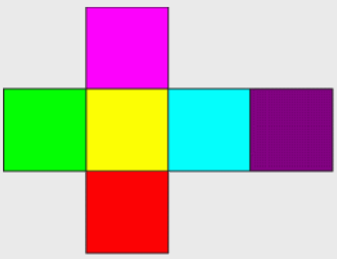
2.5 Si la base es rectangular, tiene que tener cuatro caras que sean triángulos. La única opción es la **a)**.

POLIEDROS REGULARES

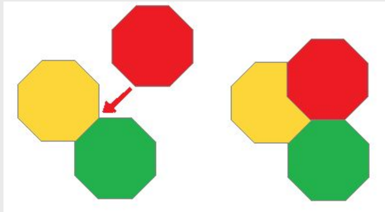
3.1 Un tetraedro tiene ocho caras que son triángulos equiláteros.



3.2

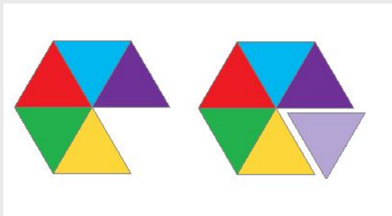


3.3 Para formar un ángulo poliedro hacen falta al menos tres caras. Si queremos que haya tres caras que sean octógonos se solapan. No es posible.

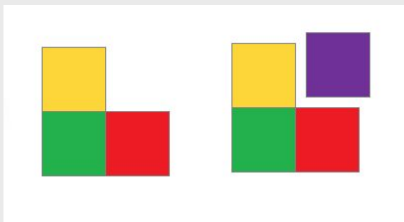


3.4 El máximo de lados es cinco ya que a partir del exágono no podemos construir un ángulo poliedro. Por eso poliedros regulares sólo hay con caras triangulares, cuadradas y pentagonales.

3.5 El máximo de caras triangulares es cinco, el sexto triángulo ya no permite construir un ángulo poliedro. Con tres triángulos tenemos el tetraedro, con cuatro el octaedro y con cinco el icosaedro.



3.6 El máximo de caras cuadradas es tres, el cuarto cuadrado no permite construir un ángulo poliedro. Con tres cuadrados tenemos el cubo.



RELACIÓN DE EULER

4.1 No es posible. Si es un poliedro euleriano debe cumplir la relación de Euler:

Caras+ Vértices = Aristas + 2. Si el número de vértices es igual que el de aristas, entonces el número de caras sería 2. ¿Un poliedro de 2 caras?

4.2 Según la relación de Euler Caras + Vértices = Aristas + 2, tendríamos que:

9 + 9 = 18 y 16 + 2 = 18.

4.3 El icosaedro tiene 20 caras, 12 vértices y 30 aristas.

Así pues la relación de Euler Caras + Vértices = Aristas + 2, tendríamos que:

20 + 12 = 32 y 30 + 2 = 32.

4.4 El dodecaedro tiene 12 caras, 20 vértices y 30 aristas.

Así pues la relación de Euler Caras + Vértices = Aristas + 2, tendríamos que:

12 + 20 = 32 y 30 + 2 = 32.

4.5 C+ V = A+ 2, tendríamos que:

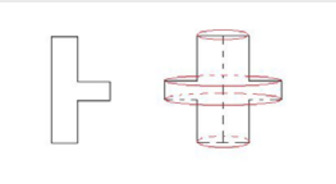
20 + 36= Aristas + 2. Luego Aristas = 20 + 36 -2 = 54. Tiene 54 aristas.

4.6 C+ V = A+ 2, tendríamos que:

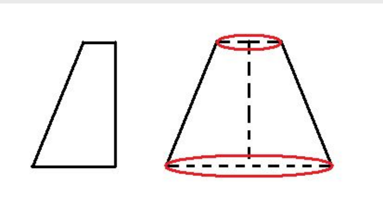
21 + Vértices = 40 + 2. Luego Vértices = 40 + 2 - 21 = 21. Tiene 21 vértices.

SOBRE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

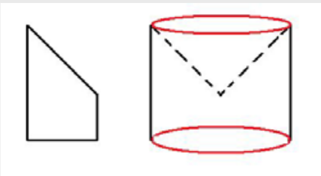
1.1



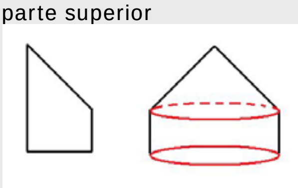
1.2 Es un tronco de cono



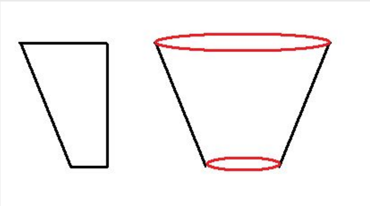
1.3 Un cilindro que tiene quitado un cono de la parte superior



1.4 Un cilindro con un cono en la parte superior



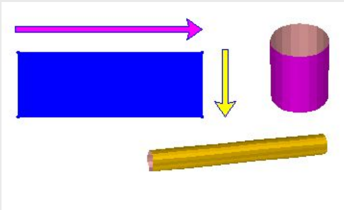
1.5 Un tronco de cono que por la orientación tiene la forma de un vaso



SOBRE CILINDROS

2.1 No es posible. La longitud de la base del rectángulo ha de coincidir con la longitud de la circunferencia de la base del cilindro y claramente en la figura es muy inferior

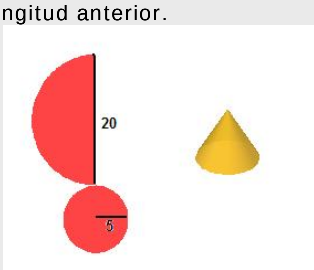
2.2 No, el cilindro es diferente salvo que la altura y la base del rectángulo sea la misma, es decir, salvo que sea un cuadrado.



2.3 La altura del rectángulo es 9 cm. y su base es la longitud de la circunferencia de la base del cilindro: 2· π· radio, donde aquí el radio es 1,5. Tendrás que aproximar el valor de π.

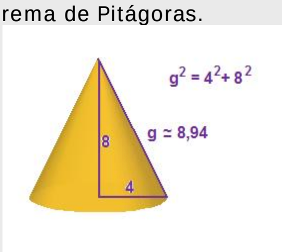
SOBRE CONOS

3.1 Puesto que el radio de la base es 5, la longitud de la circunferencia es 2· π·5. La cara lateral del cono es un sector circular cuyo arco ha de medir la longitud anterior.



La generatriz es el radio del sector a dibujar. Dado que el radio es 10, 2· π· 5 es justo la mitad, por tanto hay que dibujar medio círculo de radio 10.

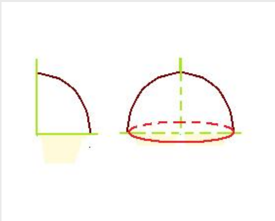
3.2 En la figura está calculada la altura. Nos basamos en el teorema de Pitágoras.



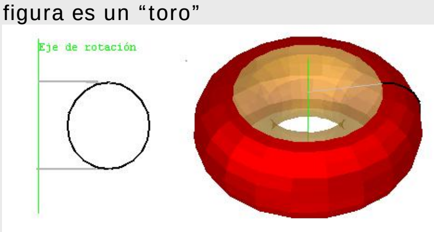
3.3 No, no es posible. Necesitamos que falte al menos un trozo para poder construir la cara lateral plegándolo.

SOBRE ESFERAS

4.1 Una semiesfera



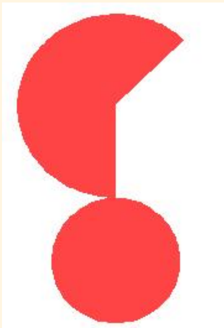
4.2 Se obtiene lo que coloquialmente identificamos como un donut. Matemáticamente esa figura es un "toro"



4.3 Son esféricas.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. Un prisma exagonal ¿cuántos vértices tiene? **12 vértices.**
2. Una pirámide pentagonal ¿cuántos vértices tiene? **6 vértices**
3. Un prisma triangular ¿cuántas aristas tiene? **9 aristas**
4. Una pirámide heptagonal, ¿cuántas aristas tiene? **14 aristas.**
5. Un poliedro convexo tiene 4 caras y 5 vértices, ¿cuántas aristas tiene? **7 aristas**
6. Un poliedro convexo tiene 9 caras y 18 aristas, ¿cuántos vértices tiene? **11 vértices**
7. Un poliedro regular de 6 vértices, ¿cuál es? **Octaedro**
8. El poliedro regular convexo de 12 caras, ¿cuál es? **Dodecaedro**
9. ¿Cómo se denomina el poliedro representado en esta figura? **Icosaedro**
10. Indica si el sólido de la figura es desarrollable **Sí**



No olvides enviar las actividades al tutor

9 Áreas de cuerpos geométricos

Objetivos

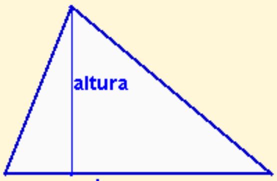
En esta quincena aprenderás a:

- Calcular el área de prismas rectos de cualquier número de caras.
- Calcular el área de pirámides de cualquier número de caras.
- Calcular el área de un tronco de pirámide.
- Calcular el área de un cilindro.
- Calcular el área de un cono.
- Calcular el área de un tronco de cono.
- Calcular el área de una esfera.
- Calcular el área de cuerpos geométricos obtenidos por la composición de todo o parte de los cuerpos anteriores.

Antes de empezar

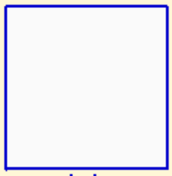
Recuerda el área de las figuras planas

Triángulo



$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Cuadrado

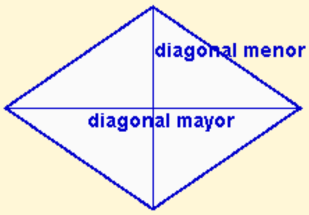


$$A = \text{lado}^2$$

Rectángulo

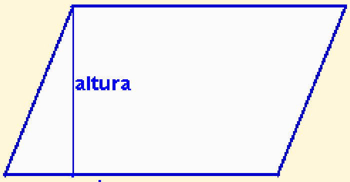
$$A = \text{base} \cdot \text{altura}$$

Rombo



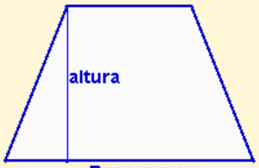
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Romboide



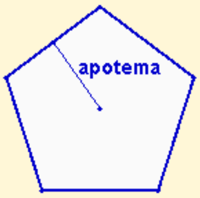
$$A = \text{base} \cdot \text{altura}$$

Trapecio



$$A = \frac{(\text{B mayor} + \text{b menor}) \cdot \text{altura}}{2}$$

Polígono regular

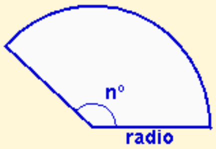


$$A = \frac{\text{Perimetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Círculo

$$A = \pi \cdot r^2$$

Sector circular



$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \text{nº grados}}{360}$$

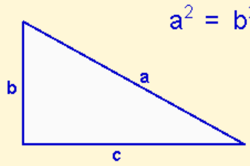
Investiga: Teorema de Pitágoras en cuerpos geométricos

En la Unidad 7 has estudiado el Teorema de Pitágoras y has visto aplicaciones de este teorema en figuras planas.

En esta unidad necesitas recordarlo y verás aplicaciones en cuerpos geométricos. En la pirámide, en el tronco de pirámide, en el cono y en el tronco de cono necesitarás construir triángulos rectángulos para calcular las aristas, la altura o la generatriz.

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

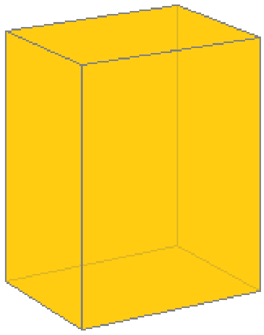


1. Área de los prismas

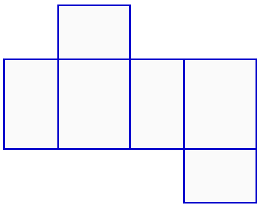
Área de los prismas

El **área** de un prisma o de cualquier poliedro, es la suma de las áreas de cada una de sus caras. Podemos distinguir:

> **Área lateral**: Suma de las áreas de las caras laterales. En el prisma las caras laterales son rectángulos.
>
> **Área total**: Es la suma del área lateral y el área de las dos bases. Las bases son dos polígonos iguales.



Paralelepípedo:
prisma rectangular recto.



Desarrollo de un paralelepípedo: se obtienen seis rectángulos iguales dos a dos. Las caras opuestas son iguales.

Calcula el área lateral y el área total de un paralelepípedo de 25 cm de alto, 15 cm de ancho y 10 cm de largo.

Área lateral:

Hay dos rectángulos de 25 por 15: $A=25\cdot15=375\ cm^2$

Hay dos rectángulos de 25 por 10: $A=25\cdot10=250\ cm^2$

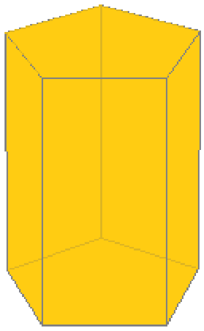
El área lateral es: **$Al = 2\cdot375 + 2\cdot250 = 1250\ cm^2$**

Área total:

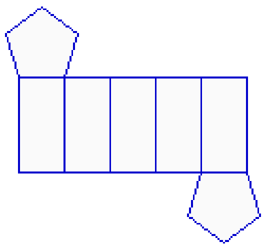
Las bases son dos rectángulos de 15 por 10:

$$A = 25\cdot15 = 375\ cm^2$$

El área total es: **$At = 1250 + 2\cdot150 = 1550\ cm^2$**



Prisma pentagonal.



Desarrollo de un prisma pentagonal: se obtienen dos pentágonos de las bases y cinco rectángulos iguales de las caras laterales.

Calcula el área lateral y el área total de un prisma pentagonal de 30 cm de alto y 12 cm de arista de la base. La apotema de la base mide 8,26 cm.

Área lateral:

Hay cinco rectángulos de 30 por 12: $30\cdot12 = 360\ cm^2$

El área lateral es: **$Al = 5\cdot360 = 1800\ cm^2$**

Área total:

Las bases son dos pentágonos de 12 cm de lado y 8,26 cm de apotema:

$$Ab = \frac{P\cdot a}{2} = \frac{5\cdot12\cdot8{,}26}{2} = 247{,}8\ cm^2$$

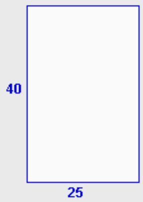
El área total es: **$At = 1800 + 2\cdot247{,}8 = 2295{,}6\ cm^2$**

EJERCICIOS resueltos

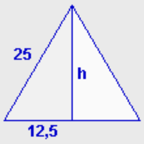
1. Calcular el área lateral y el área total de un prisma triangular de 40 centímetros de altura y 25 centímetros de arista de la base.

Área lateral: hay tres rectángulos iguales:

$Al = 3 \cdot 40 \cdot 25 = 3000 \text{ cm}^2$



Área de la base: un triángulo equilátero.
Se aplica el Teorema de Pitágoras

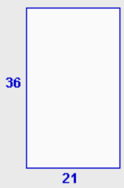


$$h = \sqrt{25^2 - 10{,}5^2} = \sqrt{468{,}75} = 21{,}65 \text{ cm}$$

$$Ab = \frac{25 \cdot 21{,}65}{2} = 270{,}63 \text{ cm}^2$$

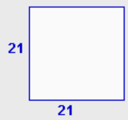
Área total: $At = 3000 + 2 \cdot 270{,}63 = 3541{,}27 \text{ cm}^2$

2. Calcular el área lateral y el área total de un prisma de base cuadrada de 36 centímetros de altura y 21 centímetros de arista de la base.



Área lateral: hay cuatro rectángulos iguales:

$Al = 4 \cdot 36 \cdot 21 = 3024 \text{ cm}^2$



Área de la base: un cuadrado

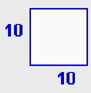
$Ab = 21^2 = 441 \text{ cm}^2$

Área total: $At = 3024 + 2 \cdot 441 = 3906 \text{ cm}^2$

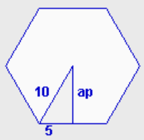
3. Calcular el área lateral y el área total de un prisma hexagonal de 10 centímetros de altura y 10 centímetros de arista de la base.

Área lateral: hay seis rectángulos iguales (en este caso particular son cuadrados):

$Al = 6 \cdot 10 \cdot 10 = 600 \text{ cm}^2$



Área de la base: un hexágono regular
Se aplica el Teorema de Pitágoras



$$ap = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8{,}66 \text{ cm}$$

$$Ab = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}81 \text{ cm}^2$$

Área total: $At = 600 + 2 \cdot 259{,}81 = 1119{,}62 \text{ cm}^2$

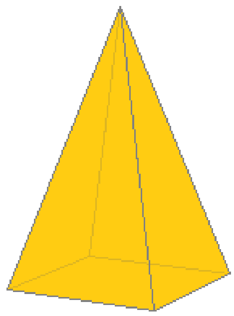
2. Área de la pirámide y del tronco de pirámide

Área de la pirámide

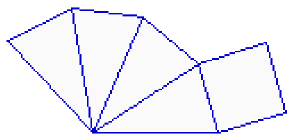
Al desarrollar una pirámide se obtiene la base que es un polígono y las caras laterales que son triángulos.

Área lateral: Suma de las áreas de las caras laterales.

Área total: Es la suma del área lateral y el área de la base. La base es un polígono cualquiera, regular o no. (Aquí trabajaremos con bases que son polígonos regulares).



Pirámide de base cuadrada

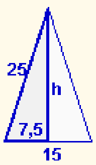


Desarrollo de una pirámide de base cuadrada: se obtienen cuatro triángulos isósceles iguales y un cuadrado.

Calcula el área lateral y el área total de una pirámide de base cuadrada de 25 cm de arista lateral y 15 cm de arista de la base.

Área lateral:

Hay cuatro triángulos de 15 cm de base. Se necesita calcular la altura:



$$h = \sqrt{25^2 - 7{,}5^2} = \sqrt{568{,}75} = 23{,}85\,\text{cm}$$

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{15 \cdot 23{,}85}{2} = 178{,}86\,\text{cm}^2$$

El área lateral es:

$$\mathbf{Al = 4 \cdot 178{,}86 = 715{,}45\ cm^2}$$

Área total:

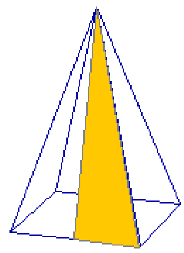
La base es un cuadrado de 15 cm de lado:

$$Ab = 15 \cdot 15 = 225\ \text{cm}^2$$

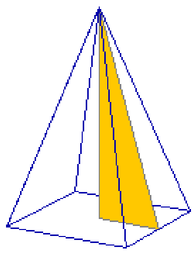
El área total es:

$$\mathbf{At = 715{,}45 + 225 = 940{,}45\ cm^2}$$

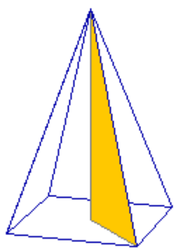
En una pirámide de base cuadrada:



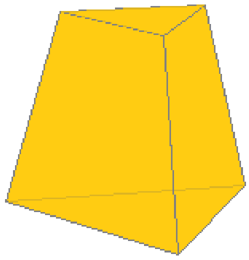
La arista lateral, la altura de una cara y la mitad de la arista de la base forman un triángulo rectángulo, siendo la hipotenusa la arista lateral.



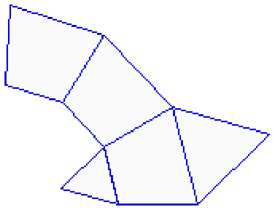
La altura de la pirámide, la altura de una cara y la mitad de la arista de la base forman un triángulo rectángulo, siendo la hipotenusa la altura de una cara.



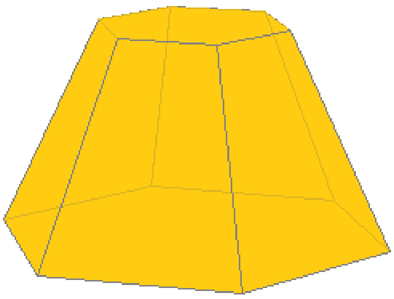
La altura de la pirámide, la arista lateral y la mitad de la diagonal de la base forman un triángulo rectángulo, siendo la hipotenusa la arista lateral.



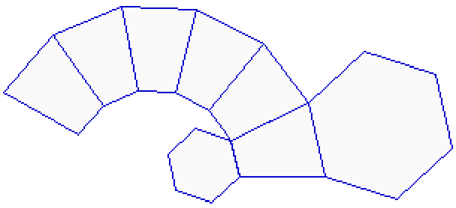
Tronco de pirámide triangular



Desarrollo de un tronco de pirámide triangular: se obtienen tres trapecios isósceles y dos triángulos equiláteros.



Tronco de pirámide hexagonal



Desarrollo de un tronco de pirámide hexagonal: se obtienen seis trapecios isósceles y dos hexágonos.

Área del tronco de pirámide

Al desarrollar un tronco de pirámide se obtienen dos bases que son polígonos semejantes y las caras laterales que son trapecios. Si el tronco procede de una pirámide regular, las bases son polígonos regulares y las caras laterales trapecios isósceles iguales.

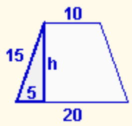
Área lateral: Suma de las áreas de las caras laterales.

Área total: Es la suma del área lateral y el área de las dos bases.

Calcula el área lateral y el área total de un tronco de pirámide triangular de 15 cm de arista lateral, 10 cm de arista de la base menor y 20 cm de arista de la base mayor.

Área lateral:

Hay tres trapecios isósceles de 10 cm de base menor y 20 cm de base mayor. Se necesita calcular la altura:



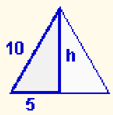
$$h = \sqrt{15^2 - 5^2} = \sqrt{200} = 14{,}14 \text{ cm}$$

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(20+10)\cdot 14{,}14}{2} = 212{,}13 \text{ cm}^2$$

El área lateral es: **Al = 3 · 212,13 = 636,40 cm²**

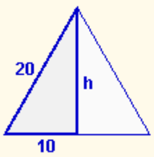
Área total:

Las bases son dos triángulos equiláteros:



$$h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8{,}66 \text{ cm}$$

$$Ab = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{10\cdot 8{,}66}{2} = 43{,}30 \text{ cm}^2$$



$$h = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 17{,}32 \text{ cm}$$

$$AB = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{20\cdot 17{,}32}{2} = 173{,}21 \text{ cm}^2$$

El área total es:

At = 636,40 + 43,30 + 173,21 = 852,90 cm²

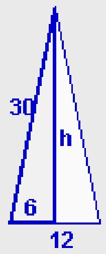
EJERCICIOS resueltos

4. Calcula el área lateral y el área total de una pirámide hexagonal de 30 cm de arista lateral y 12 cm de arista de la base.

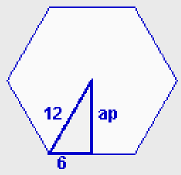
Área lateral: hay seis triángulos iguales:

$$h = \sqrt{30^2 - 6^2} = \sqrt{864} = 29,39 \text{ cm}$$

$$A = \frac{25 \cdot 29,39}{2} = 176,36 \text{ cm}^2$$



$$Al = 6 \cdot 176,36 = 1058,18 \text{ cm}^2$$



Área de la base: un hexágono regular.
Se calcula la apotema:

$$ap = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 10,39 \text{ cm}$$

$$Ab = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 10,39}{2} = 374,12 \text{ cm}^2$$

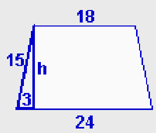
Área total: $At = 1058,18 + 374,12 = 1432,30 \text{ cm}^2$

5. Calcula el área lateral y el área total de un tronco de pirámide pentagonal de 15 cm de arista lateral y 18 y 24 cm de aristas de las bases respectivamente. Las apotemas de las bases miden 12,39 y 16,52 cm respectivamente.

Área lateral: hay cinco trapecios isósceles:

$$h = \sqrt{15^2 - 3^2} = \sqrt{216} = 14,70 \text{ cm}$$

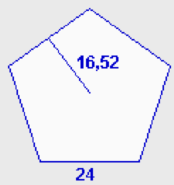
$$A = \frac{(24+18) \cdot 14,70}{2} = 308,64 \text{ cm}^2$$



$$Al = 5 \cdot 308,64 = 1543,18 \text{ cm}^2$$

Área de las bases: son dos pentágonos regulares.

$$Ab = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot 18 \cdot 12,39}{2} = 557,55 \text{ cm}^2$$



$$AB = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{5 \cdot 24 \cdot 16,52}{2} = 991,20 \text{ cm}^2$$

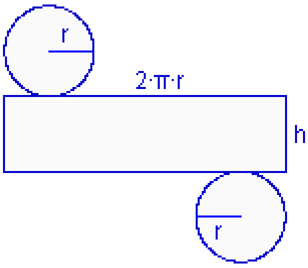
Área total: $At = 1543,18 + 557,55 + 991,20 = 3091,93 \text{ cm}^2$

3. Área de los cuerpos de revolución

Área de un cilindro

Cilindro

El desarrollo de un cilindro se compone de dos círculos que son las bases y un rectángulo de base la longitud de la circunferencia y de altura la del cilindro.



Desarrollo de un cilindro: se obtiene un rectángulo y dos círculos.

Área lateral: $Al=2\cdot\pi\cdot r\cdot h$

Área total: $At=2\cdot\pi\cdot r\cdot h+ 2\cdot\pi\cdot r^2$

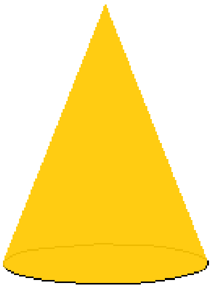
Calcula el área lateral y el área total de un cilindro de 25 cm de alto, y de 15 cm de radio de la base.

Área lateral: $Al = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h = 2\cdot\pi\cdot 15\cdot 25 = 2356{,}19\ cm^2$

Área de la base: $Ab = \pi\cdot r^2 = \pi\cdot 225 = 706{,}86\ cm^2$

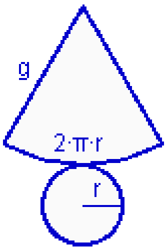
El área total es: **$At=2356{,}19+2\cdot 706{,}86=3769{,}91\ cm^2$**

Área de un cono



Cono

El desarrollo de un cono se compone del círculo de la base y un sector circular que tiene por longitud de arco, la longitud de la circunferencia y por radio, la generatriz del cono.

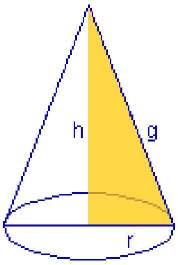


Desarrollo de un cono: se obtiene un sector circular y un círculo.

Área lateral: $Al=\pi\cdot r\cdot g$

Área total: $At=\pi\cdot r\cdot g+\pi\cdot r^2$

En un cono:



La generatriz, la altura y el radio de la base forman un triángulo rectángulo, siendo la hipotenusa la generatriz.

Calcula el área lateral y el área total de un cono de 30 cm de generatriz y de 16 cm de radio de la base.

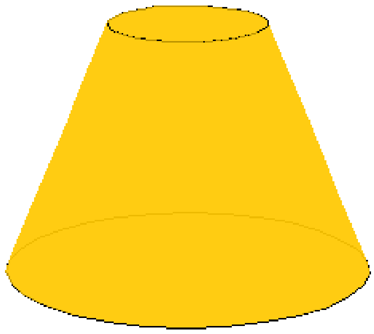
Área lateral: $Al = \pi\cdot r\cdot g = \pi\cdot 16\cdot 30 = 1507{,}96\ cm^2$

Área de la base: $Ab = \pi\cdot r^2 = \pi\cdot 256 = 804{,}25\ cm^2$

El área total es: **$At=1507{,}96+804{,}25=2312{,}21\ cm^2$**

Área de un tronco de cono

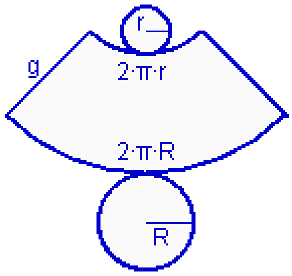
El desarrollo de un tronco de cono se compone quitar dos círculos que son las bases y una figura llamada trapecio circular que tiene por lados curvos, las longitudes de las circunferencias y por altura, la generatriz del tronco de cono.



Tronco de cono

Área lateral: **$Al=\pi\cdot g\cdot(R+r)$**

Área total: **$At=\pi\cdot g\cdot(R+r)+\pi\cdot R^2+\pi\cdot r^2$**



Desarrollo de un tronco de cono:

Calcula el área lateral y el área total de un tronco de cono de 15 cm de generatriz, 10 cm de radio de la base menor y 20 cm de radio de la base mayor.

Área lateral:

$Al = \pi\cdot g\cdot(R+r) = \pi\cdot 15\cdot(10+20) = 1413{,}72\ cm^2$

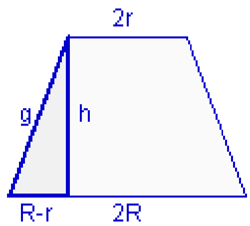
Área de la base menor: $Ab = \pi\cdot 10^2 = 314{,}16\ cm^2$

Área de la base mayor: $AB = \pi\cdot 20^2 = 1256{,}64\ cm^2$

El área total es:

$At=1413{,}72+314{,}16+1256{,}64=2984{,}51\ cm^2$

Al cortar un tronco de cono por un plano que pase por los centros de las dos bases se obtiene este trapecio isósceles del que se puede deducir la relación que existe entre los radios, la altura y la generatriz.



Área de una esfera

La esfera no se puede desarrollar y representar en un plano.

El área de la esfera es igual a cuatro veces la superficie del círculo de mayor radio que contiene.

Área: **$A=4\cdot\pi\cdot r^2$**

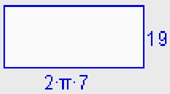
Esfera

Calcula el área de una esfera 30 cm de radio.

Área: $A = 4\cdot\pi\cdot r^2 = 4\cdot\pi\cdot 30^2 = 11309{,}73\ cm^2$

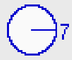
EJERCICIOS resueltos

6. Calcula el área lateral y el área total de un cilindro de 19 cm de altura y 7 cm de radio de la base.



Área lateral: rectángulo

$$Al = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h = 2\cdot\pi\cdot 7\cdot 19 = 835{,}66\ cm^2$$



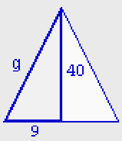
Área de la base: círculo

$$Ab = \pi\cdot r^2 = \pi\cdot 7^2 = 153{,}94\ cm^2$$

Área total: $At = 835{,}666 + 2 \cdot 153{,}94 = 1143{,}54\ cm^2$

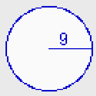
7. Calcula el área lateral y el área total de un cono de 40 cm de altura y 9 cm de radio de la base.

Área lateral: se necesita calcular la generatriz:



$$g = \sqrt{9^2 + 41^2} = \sqrt{1681} = 41\ cm$$

$$Al = \pi\cdot r\cdot g = \pi\cdot 9\cdot 41 = 1159{,}25\ cm^2$$



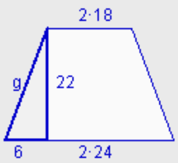
Área de la base: círculo

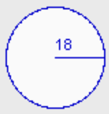
$$Ab = \pi\cdot r^2 = \pi\cdot 9^2 = 254{,}47\ cm^2$$

Área total: $At = 1159{,}25 + 254{,}47 = 1413{,}72\ cm^2$

8. Calcula el área lateral y el área total de un tronco de cono de 22 cm de altura, 18 cm de radio de la base menor y 24 cm de radio de la base mayor.

Área lateral: se necesita calcular la generatriz:

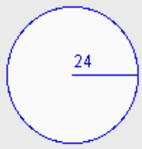




$$g = \sqrt{6^2 + 22^2} = \sqrt{520} = 22{,}80\ cm$$

$$A = \pi\cdot g\cdot(R+r) = \pi\cdot 22{,}8\cdot(24+18) = 3008{,}85\ cm^2$$

Área de las bases: círculos



$$Ab = \pi\cdot r^2 = \pi\cdot 18^2 = 1017{,}88\ cm^2$$

$$AB = \pi\cdot r^2 = \pi\cdot 24^2 = 1809{,}56\ cm^2$$

Área total: $At = 3008{,}85 + 1017{,}88 + 1809{,}56 = 5836{,}29\ cm^2$

9. Calcula el área de una esfera de de 1 metro de radio.

$$A = 4\cdot\pi\cdot r^2 = 4\cdot\pi\cdot 1^2 = 12{,}57\ m^2$$

4. Resolución de problemas

Resolución de problemas

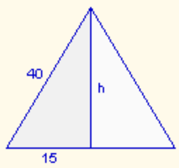
En diversas ocasiones se presentarán problemas de cálculo de áreas de cuerpos geométricos, en los que los cuerpos que aparecen se obtienen agrupando varios de los cuerpos ya estudiados.

En situaciones de este tipo se descomponen los cuerpos geométricos en cuerpos más simples y se resuelve el problema por partes.

Hay que tener cuidado con las caras comunes en la descomposición para no contarlas dos veces.

Calcula el área de la figura 1, sabiendo que las medidas están expresadas en centímetros.

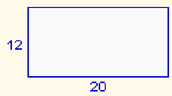
Área de los triángulos: Hay seis triángulos iguales a éste:



$$h = \sqrt{40^2 - 15^2} = \sqrt{1375} = 37,08\ \text{cm}$$

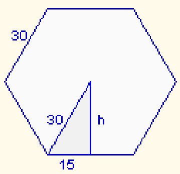
$$A = \frac{30 \cdot 37,08}{2} = 556,22\ \text{cm}^2$$

Área de los rectángulos: Hay seis rectángulos iguales a éste:



$$A = 20 \cdot 12 = 240\ \text{cm}^2$$

Área de las bases (hexágono): Las caras horizontales forman un hexágono de 30 cm de lado:



$$h = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} = 25,98\ \text{cm}$$

$$A = \frac{6 \cdot 30 \cdot 25,98}{2} = 2338,27\ \text{cm}^2$$

El área total es:

$$\mathbf{At = 6 \cdot 556,22 + 6 \cdot 240 + 2338,27 = 7115,56\ cm^2}$$

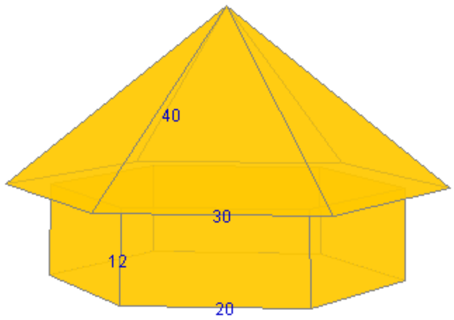


Figura 1

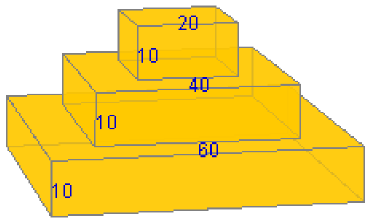


Figura 2

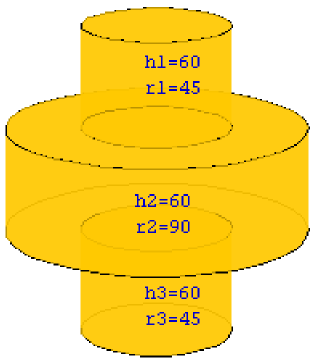


Figura 3

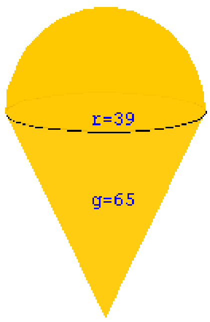
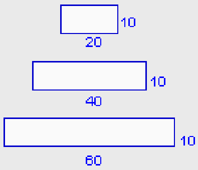


Figura 4

EJERCICIOS resueltos

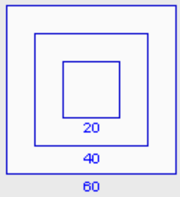
10. Calcula el área de la figura 2 de la página anterior, sabiendo que las medidas están expresadas en centímetros.

Área lateral: hay cuatro rectángulos de cada uno :



$$A1 = 20 \cdot 10 = 200 \text{ cm}^2$$
$$A2 = 40 \cdot 10 = 400 \text{ cm}^2$$
$$A3 = 60 \cdot 10 = 600 \text{ cm}^2$$

$$Al = 4 \cdot 200 + 4 \cdot 400 + 4 \cdot 600 = 4800 \text{ cm}^2$$



Área de la base: al unir las bases superiores se obtiene un cuadrado de 60 cm de lado, que coincide con el cuadrado de la base inferior

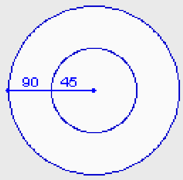
$$Ab = 60^2 = 3600 \text{ cm}^2$$

Área total: $At = 4800 + 2 \cdot 3600 = 12000 \text{ cm}^2$

11. Calcula el área de la figura 3 de la página anterior, sabiendo que las medidas están expresadas en centímetros.

Área lateral: corresponde con el área lateral de tres cilindros:

$$A1 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 45 \cdot 60 = 16964{,}60 \text{ cm}^2$$
$$A2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 90 \cdot 60 = 33929{,}20 \text{ cm}^2$$
$$A3 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 45 \cdot 60 = 16964{,}60 \text{ cm}^2$$



$$Al = 16964{,}60 + 33929{,}20 + 16964{,}60 = 67858{,}40 \text{ cm}^2$$

Área de la base: al unir las bases superiores por una parte y las bases inferiores por otra se obtienen círculos de 90 cm de radio.

$$Ab = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 90^2 = 25446{,}90 \text{ cm}^2$$

Área total: $At = 67858{,}40 + 2 \cdot 25446{,}90 = 118752{,}20 \text{ cm}^2$

12. Calcula el área de la figura 4 de la página anterior, sabiendo que las medidas están expresadas en centímetros.

Se puede descomponer este cuerpo geométrico en una semiesfera y un cono:

Área de la semiesfera: $A_S = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{2} = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 39^2}{2} = 9556{,}72 \text{ cm}^2$

Área lateral del cono: $A_c = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 39 \cdot 65 = 7963{,}94 \text{ cm}^2$

Área total: $At = A_s + A_c = 9556{,}72 + 7963{,}94 = 17520.66 \text{ cm}^2$

Para practicar

1. Estoy construyendo una piscina de 5,7 metros de largo, 4 metros de ancho y 1,9 metros de alto. Quiero cubrir las paredes y el fondo con azulejos de forma cuadrada de 20 cm de lado. ¿Cuántos azulejos necesitaré si aproximadamente se desperdicia un 10%?

2. Una madre compra a su hija una caja de sus bombones favoritos. La caja tiene forma de prisma triangular de 21 cm de larga y 12 cm de lado de la base. ¿Cuál es la cantidad de papel mínima que se necesita para envolverla?

3. Se va a restaurar el lateral y la parte superior de una torre con forma de prisma octogonal de 12 m de alta. La base es un octógono regular de 3 m de lado y 3,62 metros de apotema. Si la empresa de restauración cobra 226 euros por cada metro cuadrado, ¿cuál será el precio de la restauración?

4. Una pizzería hace pizzas de varios tamaños y las vende en cajas hexagonales de 39 cm de lado y 4,7 cm de alto. ¿Qué cantidad de cartón se necesita para cada caja teniendo en cuenta que la caja está formado por dos partes compuestas de una base y el lateral?

5. Una pirámide egipcia de base cuadrada tiene 150 metros de altura y 139 metros de arista de la base. ¿Cuál es su superficie lateral?

6. Calcula los metros cuadrados de tela que se necesita para fabricar una sombrilla con forma de pirámide dodecagonal de 84 cm de arista de la base y 194 cm de arista lateral.

7. La parte exterior del tejado de un edificio tiene forma de tronco de pirámide de bases cuadradas de 47 m y 51 m de lado respectivamente. La arista lateral del tejado mide 7,3 m. Calcula la superficie.

8. Un macetero de plástico tiene forma de tronco de pirámide hexagonal. Los lados de las bases miden respectivamente 36 y 42 cm y la arista lateral mide 7,5 cm. Calcula la cantidad de plástico que se necesita para su fabricación.

9. Una lata de conservas tiene 16,6 cm de altura y 8,4 cm de radio de la base. ¿Qué cantidad de metal se necesita para su construcción? ¿Qué cantidad de papel se necesita para la etiqueta?

10. Se quiere tratar dos depósitos con pintura antioxidante. Los depósitos tienen 7,3 metros de alto y 9,7 metros de radio de la base. El precio por pintura de cada metro cuadrado es de 39 euros. ¿Cuál es el precio final de la pintura, sabiendo que sólo se pinta la base superior de cada uno?

11. Una copa tiene forma de cono de 10,2 cm de generatriz y 9,5 cm de diámetro de la circunferencia superior. La base es una circunferencia de 4,9 cm de radio. Cada vez que se limpia, ¿qué superficie de cristal hay que limpiar?

12. Se desea acondicionar un silo antiguo con forma de cono. Para ello se va a aplicar una capa aislante a la pared interior y al suelo. Las dimensiones del silo son 16,5 metros de alto y 7,5 metros de radio de la base. ¿Qué cantidad de superficie se va a tratar?

13. Un vaso de plástico tiene 7,1 cm de diámetro superior y 5,6 cm de diámetro inferior. La generatriz mide 12,6 cm. ¿Cuántos metros cuadrados de plástico se han necesitado para fabricar 150 vasos?

14. He comprado un papel resistente al calor para fabricarme una lámpara con forma de tronco de cono, de 17,3 cm de diámetro superior y 15,7 cm de diámetro inferior. La altura mide 32,2 cm. ¿Qué cantidad de papel necesito?

15. Sabiendo que el radio de la Tierra es de 6370 kilómetros, calcula la superficie de nuestro planeta utilizando distintas aproximaciones del número π.

a) 3 b) 3,14 c) 3,1416 d) π

16. a) Calcula la superficie de una pelota de 5 cm de radio.

b) Calcula la superficie de una pelota de radio doble de la anterior.

c) Calcula la superficie de una pelota de radio 10 veces mayor que la primera.

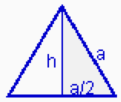
d) ¿Qué relación hay entre las superficies de las esferas?

Para saber más

ÁREA DE LOS POLIEDROS REGULARES

Los poliedros regulares tienen todas sus caras iguales. Para calcular su área, se calcula el área de una de sus caras y se multiplica por el número de caras que tiene. Vamos como se puede calcular el área de un triángulo equilátero y de un pentágono regular.

Área de un triángulo equilátero en función del lado "a"

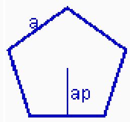


$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

altura: $h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

Área: $A = \frac{1}{2}\cdot a \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{a^2\frac{\sqrt{3}}{4}}$

Área de un pentágono regular en función del lado "a"

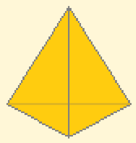


Para calcular el área de un pentágono regular se necesita la unidad de Trigonometría de 4º E.S.O.

apotema: $ap = \frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

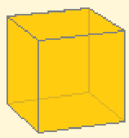
Área: $\mathbf{A = \frac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}$

Ahora ya se puede calcular el área de los poliedros regulares.



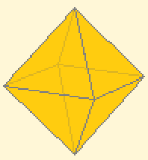
TETRAEDRO: formado por cuatro triángulos equiláteros

$$A = 4\cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = a^2\sqrt{3}$$



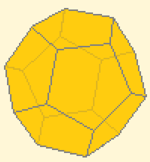
CUBO: formado por seis cuadrados

$$\mathbf{A = 6\cdot a^2}$$



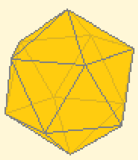
OCTAEDRO: formado por ocho triángulos equiláteros

$$A = 8\cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = 2\cdot a^2\sqrt{3}$$



DODECAEDRO: formado por doce pentágonos regulares

$$A = 20\cdot\frac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} \Rightarrow \mathbf{A = 5\cdot a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}$$



ICOSAEDRO: formado por veinte triángulos equiláteros

$$A = 20\cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = 5\cdot a^2\sqrt{3}$$

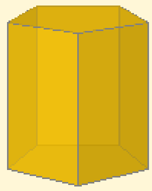
Recuerda lo más importante

ÁREAS DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

Área lateral: suma de las áreas de todas las caras laterales de un cuerpo geométrico.

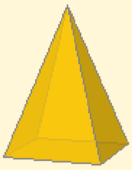
Área total: suma del área lateral y del área de las bases de un cuerpo geométrico.

PRISMA



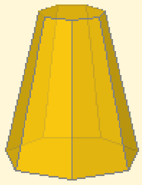
Al = nº caras · área del rectángulo
At = Al + 2 · área del polígono regular

PIRÁMIDE



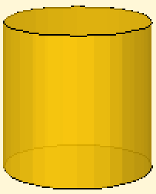
Al = nº caras · área del triángulo
At = Al + área del polígono regular

TRONCO DE PIRÁMIDE



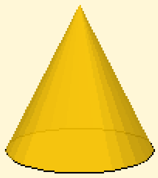
Al = nº caras · área del trapecio
At = Al + área de polígonos regulares

CILINDRO



$Al = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h$
$At = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h + 2\cdot\pi\cdot r^2$

CONO



$Al = \pi\cdot r\cdot g$
$At = \pi\cdot r\cdot g + \pi\cdot r^2$

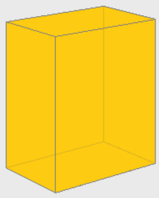
TRONCO DE CONO

$Al = \pi\cdot g\cdot(R+r)$
$At = \pi\cdot g\cdot(R+r) + \pi\cdot R^2 + \pi\cdot r^2$

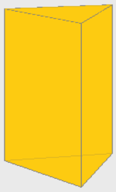
ESFERA

$A = 4\cdot\pi\cdot r^2$

Autoevaluación



1. Calcula el área total de un ortoedro de 72 metros de largo, 42 metros de ancho y 26 metros de alto.

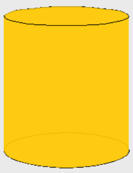


2. Calcula el área total de un prisma triangular de 55 metros de altura y 30 metros de arista de la base.

3. Calcula el área total de una pirámide de base cuadrada de 69 metros de altura y 77 metros de arista de la base.

4. Calcula el área total de una pirámide hexagonal de 114 metros de arista lateral y 100 metros de arista de la base.

5. Calcula el área total de un tronco de pirámide de 7 caras laterales sabiendo que las aristas de las bases miden respectivamente 47 y 71 metros, la arista lateral mide 62 metros y las apotemas de las bases miden respectivamente 48,80 y 73,78 metros.

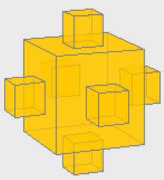


6. Calcula el área total de un cilindro de 81 metros de altura y 15 metros de radio de la base.

7. Calcula el área total de un cono de 29 metros de altura y 42 metros de radio de la base.

8. Calcula el área total de un tronco de cono cuya generatriz mide 24 metros y los radios de las bases miden respectivamente 41 y 57 metros.

9. Calcula el área de una esfera de 67 metros de radio.



10. Calcula el área total de este cuerpo geométrico sabiendo que la arista del cubo pequeño mide 13 metros y la arista del cubo grande es el triple.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 1641 azulejos
2. 880,71 cm^2
3. 74905,44 euros
4. 10102,95 cm^2
5. 45958,58 m^2
6. 9,55 m^2
7. 1376,05 m^2
8. 4975,59 cm^2
9. 1319,57 cm^2 de metal
   876,13 cm^2 de papel
10. 57759,37 euros
11. 455,28 cm^2
12. 603,76 m^2
13. 4,14 m^2
14. 1669,64 cm^2
15. a) 486922800 km^2
    b) 509645864 km^2
    c) 509905556,16 km^2
    d) 509904363,78 km^2
16. a) 314,16 cm^2
    b) 1256,64 cm^2
    c) 31415,93 cm^2
    d) la relación es igual al cuadrado de la relación entre los radios.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 11976 m^2
2. 5729,42 m^2
3. 18097,19 m^2
4. 56715,76 m^2
5. 51468,83 m^2
6. 9047,79 m^2
7. 12276,23 m^2
8. 22877,08 m^2
9. 56410,44 m^2
10. 13182 m^2

No olvides enviar las actividades al tutor ►

10 Volumen de los cuerpos geométricos.

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

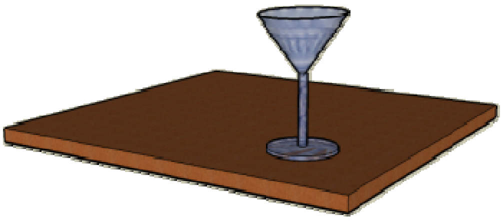
- Comprender el concepto de "medida del volumen" y conocer y manejar las unidades de medida del S.M.D.
- Obtener y aplicar expresiones para el cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos comunes. Observar las posibles similitudes entre algunas de dichas expresiones.
- Discriminar y comparar correctamente los conceptos de volumen y capacidad.
- Conocer el teorema de Cavalieri y aplicarlo a la obtención de expresiones para el cálculo de volúmenes de determinados cuerpos oblicuos.

Antes de empezar

En esta quincena vas a aprender a calcular con soltura los volúmenes de los cuerpos geométricos elementales y también los volúmenes de otros cuerpos más complejos, por descomposición en cuerpos sencillos. De esta forma, podrás resolver muchos problemas reales, entre otros:

¿Cuántos peces se pueden meter en un acuario?

¿Cuánto pesa cada bloque de hormigón?

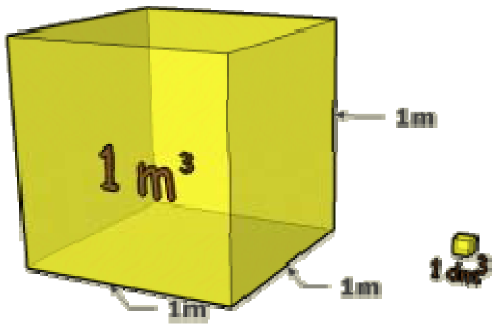


¿Qué capacidad tiene la copa?

1. Volumen y capacidad

Unidades de volumen

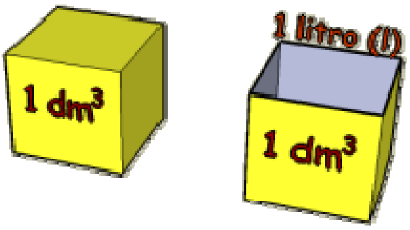
El **volumen de un cuerpo** es la cantidad de espacio que ocupa. La unidad principal es el **metro cúbico (m^3).**



Una unidad de volumen es 1000 veces mayor que la del orden inmediato inferior y 1000 veces más pequeña que la del orden inmediato superior.

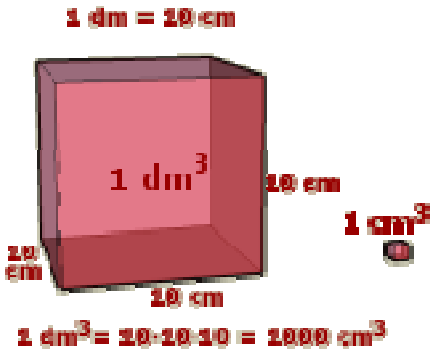
Capacidad y volumen

El **volumen** es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo y **capacidad** es lo que cabe dentro de un recipiente.

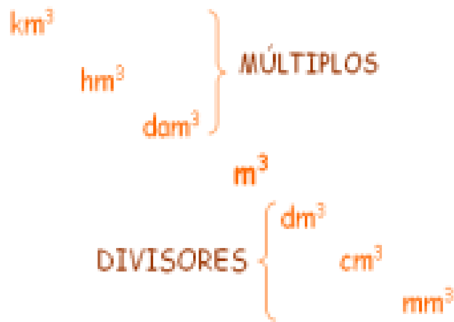


Un **litro (l)** es la capacidad de una caja cúbica de 1 dm de lado.

En general se llama capacidad de un recipiente a su volumen.



Relación entre las unidades. Cada unidad de volumen es 1000 veces mayor que la del orden inferior siguiente y 1000 veces menor que la del orden superior anterior.



Para pasar de una unidad a otra basta con observar cuántos niveles se suben o se bajan. Multiplicaremos por mil tantas veces como niveles se bajen y dividiremos entre mil tantas veces como niveles se suban. Por ejemplo: para pasar de hm^3 a m^3 hay que bajar dos niveles, lo que equivale a multiplicar por 1000 dos veces, que es igual que multiplicar por 1.000.000.

$$1 \ m^3 = 1000 \ l$$
$$1 \ dm^3 = 1 \ l$$
$$1000 \ cm^3 = 1 \ l$$
$$1 \ cm^3 = 1 \ ml$$

En general se llama capacidad de un recipiente a su volumen. Tanto las unidades de volumen, como los múltiplos y divisores del litro, se usan para medir volúmenes y capacidades.

EJERCICIOS resueltos

1. Expresa en mm^3 4,3 m^3.

Para pasar de m^3 a mm^3 hay que bajar 3 niveles. Por tanto, hay que multiplicar por 1000 tres veces, lo que equivale a multiplicar por 1.000.000.000:

$$4{,}3\ m^3 = 4{,}3 \cdot 1.000.000.000\ mm^3 = \mathbf{4.300.000.000\ mm^3}$$

2. Expresa en dam^3 2,4 m^3.

Para pasar de m^3 a dam^3 hay que subir 1 nivel. Por tanto, hay que dividir entre 1000:

$$2{,}4\ m^3 = 2{,}4 : 1000\ dam^3 = \mathbf{0{,}0024\ dam^3}$$

3. ¿Cuántos mm^3 son 4,9 dm^3?

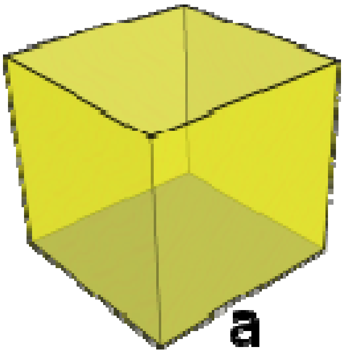
Para pasar de dm^3 a mm^3 hay que bajar 2 niveles. Por tanto, hay que multiplicar por 1000 dos veces, lo que equivale a multiplicar por 1.000.000:

$$4{,}9\ dm^3 = 4{,}9 \cdot 1.000.000\ mm^3 = \mathbf{4.900.000\ mm^3}$$

2. Volúmenes de prismas y pirámides

Cubo

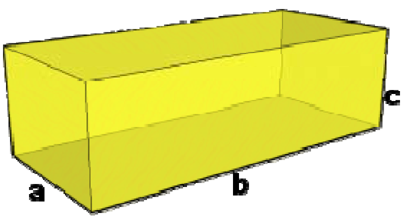
Un **cubo** es un prisma particular formado por seis caras cuadradas. Su volumen es el cubo de la longitud de la arista.



Volumen (V)= a · a · a = a^3

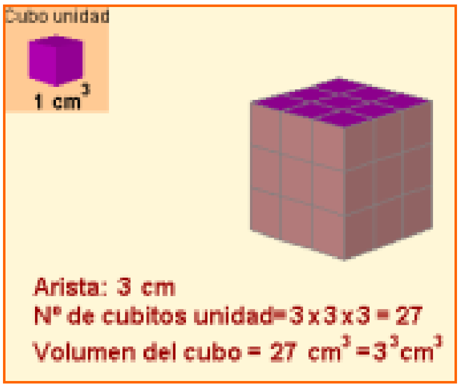
Ortoedro

Un **ortoedro** es un prisma cuyas caras son todas rectangulares.

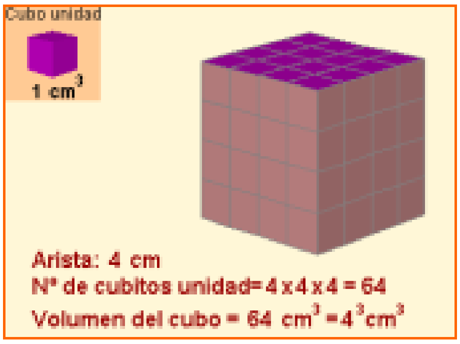


Volumen (V)= a · b · c

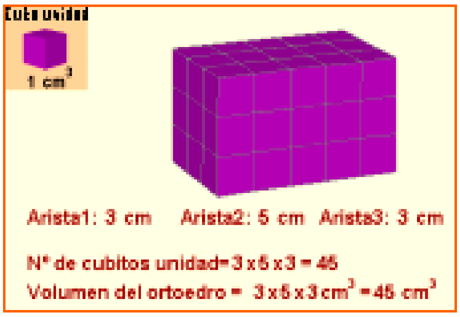
Deducción de las fórmulas



Un cubo de 3 cm de arista estaría formado por 3^3=27 cubos unidad, de un cm^3 cada uno.

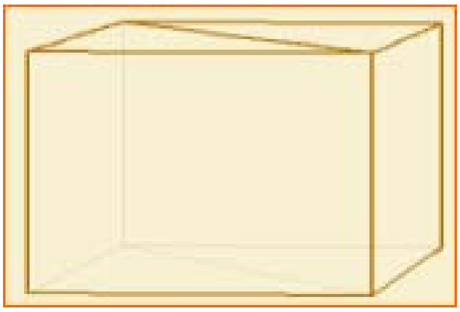


Un cubo de 4 cm de arista estaría formado por 4^3=64 cubos unidad, de un cm^3 cada uno. En general, el volumen de un cubo es la longitud de la arista al cubo.

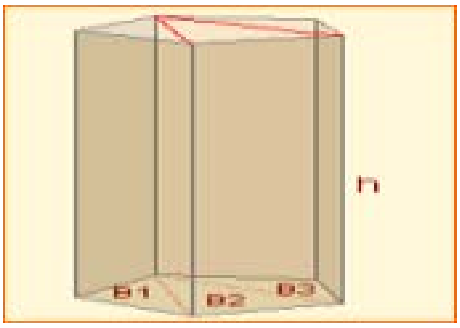


El volumen de un ortoedro es el producto de las longitudes de las aristas.

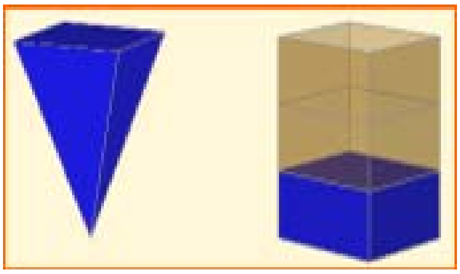
Deducción de las fórmulas.



Con dos prismas triangulares se puede formar un paralelepípedo recto, y de éste se puede obtener un ortoedro. Es fácil deducir que el volumen del prisma triangular es el área de su base por su altura.



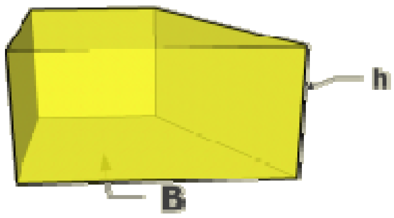
Los restantes prismas rectos se pueden descomponer en prismas triangulares. De esta forma se deduce sin dificultad que el volumen de un prisma recto es el área de su base por su altura.



El volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma altura y misma base. Por tanto, el volumen de una pirámide es un tercio del área de su base por su altura.

Resto de prismas rectos

Un **prisma recto** es un poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas, llamadas bases y cuyas caras laterales son rectangulares.

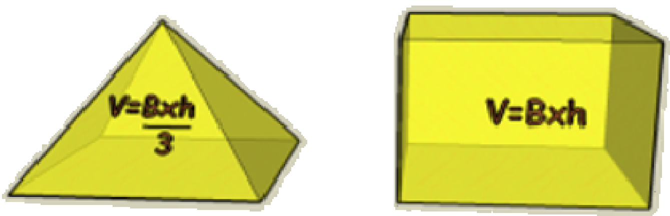


Volumen (V)= B · h

B=área de la base   h=altura

Relación entre prismas y pirámides

El **volumen de una pirámide** es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma base que dicha pirámide y la misma altura que ésta.

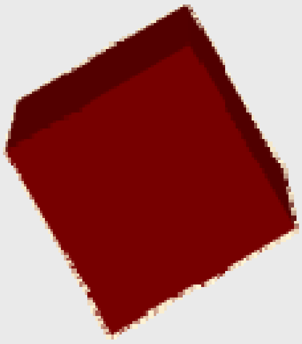


Volumen (V)= (B · h)/3

B=área de la base   h=altura

EJERCICIOS resueltos

4. Calcula, por tanteo, la longitud de la arista de un cubo de 343 m^3 de volumen.



La arista medirá 7 m, ya que:

$$\mathbf{7 \cdot 7 \cdot 7 = 343\ m^3}$$

5. Halla el peso de un bloque cúbico de hormigón de 1,9 m de lado.

(Un metro cúbico de hormigón pesa 2350 kg)

El volumen del bloque es:

$V = (1{,}9)^3 = 6{,}859\ m^3$

Su peso será:

$$\mathbf{m = 2350 \cdot 6{,}859 = 16.118{,}7\ Kg.}$$

6. ¿Cuántos peces, pequeños o medianos, se pueden introducir en un acuario cuyas medidas interiores son 88 x 65 x 70 cm? *(Se recomienda introducir, a lo sumo, un pez mediano o pequeño cada cuatro litros de agua)*

La capacidad del acuario es:

$V = 85 \cdot 65 \cdot 70 = 386.750\ cm^3 = 386{,}8$ litros

Se pueden introducir:

$$\frac{386{,}8}{4} \approx \mathbf{96\ peces}$$

EJERCICIOS resueltos

7. La base de este prisma es un polígono regular de lado 1,7 cm y apotema 1,5 cm. Calcula su volumen sabiendo que su altura es 3,9 cm.

El área de la base es:

$$B = \frac{6 \cdot 1{,}7 \cdot 1.5}{2} = 7{,}65 \text{ cm}^2$$

El volumen es:

$$\mathbf{V = 7{,}65 \cdot 3{,}9 = 29{,}83\ cm^3}$$

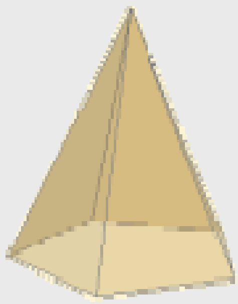
8. La base de esta pirámide es un polígono regular de lado 1,3 cm y apotema 0,9 cm. Calcula su volumen sabiendo que su altura es 2,7 cm.

El área de la base es:

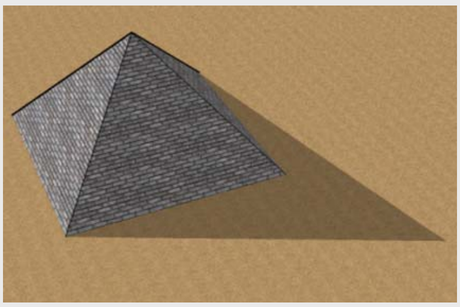
$$B = \frac{5 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}9}{2} = 2{,}93 \text{ cm}^2$$

El volumen es:

$$V = \frac{2{,}93 \cdot 2{,}7}{3} = \mathbf{2{,}64\ cm^3}$$



9. La Gran Pirámide de Giza es la única que perdura de las *siete maravillas del mundo antiguo*. Actualmente tiene una altura de 137 m y la base es un cuadrado de 230 m de lado. ¿Cuál es su volumen aproximado?



El área de la base es:

$B = 230 \cdot 230 = 52.900\ m^2$

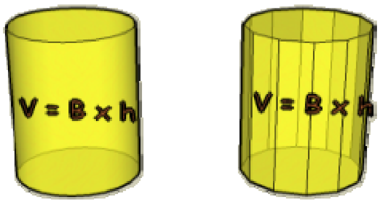
Su volumen aproximado es:

$$V = \frac{52900 \cdot 137}{3} = \mathbf{2.415.767\ m^3}$$

3. Cuerpos de revolución

Volumen de un cilindro

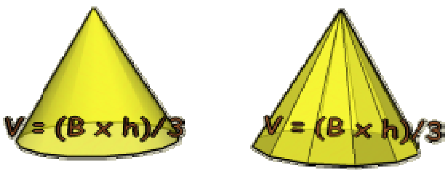
Al crecer el número de caras de un prisma indefinidamente, éste se transforma en un cilindro. Como en el prisma, el **volumen de un cilindro** es el área de su base por su altura.



Volumen (V)= $\pi \cdot r^2 \cdot h$

Volumen de un cono

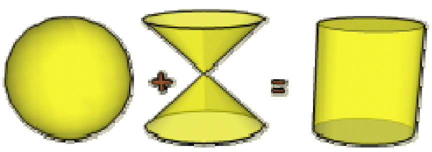
Al crecer el número de caras de una pirámide, ésta se transforma en un cono. Como en la pirámide, el **volumen de un cono** es un tercio del área de su base por su altura.



Volumen (V)= $(\pi \cdot r^2 \cdot h)/3$

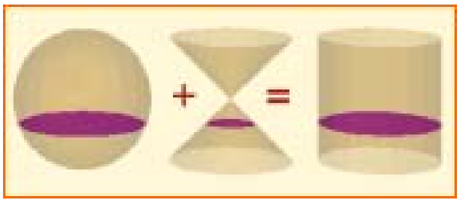
Volumen de una esfera

El **volumen de una esfera** se puede obtener a partir del volumen de un cilindro y de dos conos.



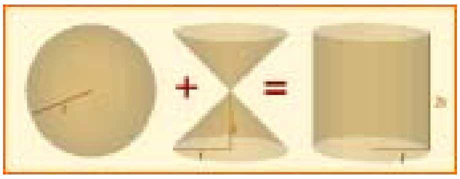
Volumen (V)= $(4/3)\cdot\pi\cdot r^3$

Deducción de la fórmula del volumen de una esfera.



Una propiedad importante. En la figura, el radio de las bases del cono y del cilindro es el mismo que el radio de la esfera. La altura del cilindro es el diámetro de la esfera y la altura de los conos coincide con el radio de la esfera. En estas condiciones, al seccionar los tres cuerpos por un plano horizontal se tiene que la suma de las áreas de las secciones de la esfera y del cono es igual al área de la sección del cilindro.

De la propiedad anterior se deduce que el volumen de esa esfera más el de los dos conos coincide con el volumen del cilindro:



Y de esta relación se tiene que:

$$V_{esfera} = V_{cilindro} - V_{conos}$$

Se sabe que:

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2 \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V_{conos} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot r}{3} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Por tanto, el volumen de la esfera queda:

$$2 \cdot \pi \cdot r^3 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \left(2 - \frac{2}{3}\right) \cdot \pi \cdot r^3$$

$$\boxed{V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$

EJERCICIOS resueltos

10. Se echan 7 cm^3 de agua en un recipiente cilíndrico de 1,3 cm de radio. ¿Qué altura alcanzará el agua?

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, despejando h:

$$h = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{7}{3{,}14159 \cdot 1{,}3^2} = \mathbf{1{,}32\ cm}$$

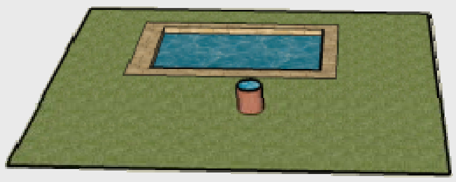
11. ¿Cuántos cubos cilíndricos, de 47 cm de altura y 16 cm de radio, se tienen que vaciar en una piscina de 10x6x1,5 m para llenarla?

La capacidad de cada cubo es:
$V = 3{,}14159 \cdot 16^2 \cdot 47 = 37.799{,}61\ cm^3$

La capacidad de la piscina es:
$V = 10 \cdot 6 \cdot 1{,}5 = 90\ m^3 = 90.000.000\ cm^3$

Serán necesarios:

$$\frac{90.000.000}{37799{,}61} \approx 2381 \text{ cubos de agua}$$



12. ¿Cuántas copas se pueden llenar con 6 litros de refresco, si el recipiente cónico de cada copa tiene una altura interior de 6,5 cm y un radio interior de 3,6 cm?

La capacidad de cada copa es:

$$V = \frac{3{,}14159 \cdot 3{,}6^2 \cdot 6{,}5}{3} = 88{,}22\ cm^3$$

Se pueden llenar:

$$\frac{6000}{88{,}22} \approx \mathbf{68\ copas}$$

13. Se introduce una bola de plomo, de 1 cm de radio, en un recipiente cilíndrico de 3,1 cm de altura y 1,5 cm de radio. Calcula el volumen de agua necesario para llenar el recipiente.

El volumen del cilindro es:
$V = 3{,}14159 \cdot 1{,}5^2 \cdot 3{,}1 = 21{,}91\ cm^3$
El volumen de la bola es:
$V = (4/3) \cdot 3{,}14159 \cdot 1^3 = 4{,}19\ cm^3$

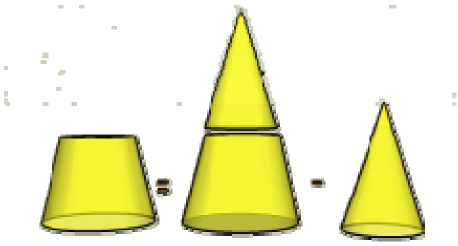
Para llenar el recipiente, hay que añadir:

$21{,}91 - 4{,}19 = \mathbf{17{,}72\ cm^3}$

4. Otros cuerpos

Tronco de cono

Para calcular el volumen de un **tronco de cono** es suficiente conocer su altura y los radios de sus bases.

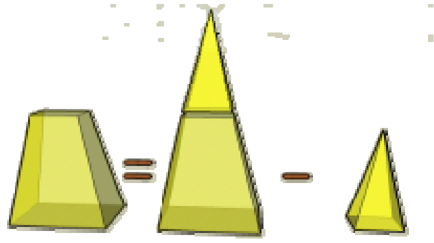


$$V_{\text{tronco de cono}} =$$
$$= V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono pequeño}}$$

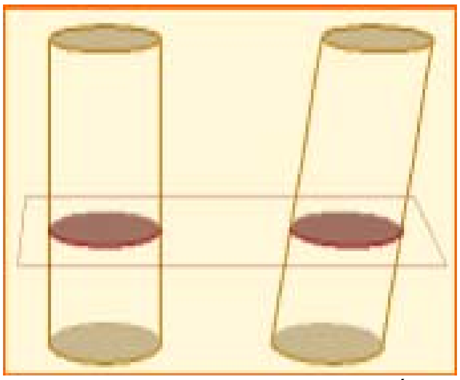
Cada montón tiene 21 monedas de 20 céntimos. Es evidente que los tres montones tienen el mismo volumen. Esta sencilla observación permite calcular los volúmenes de algunos cuerpos geométricos a partir de la deformación de otros.

Tronco de pirámide

Para calcular el volumen de un **tronco de pirámide** se utiliza el procedimiento que se expresa en la imagen:



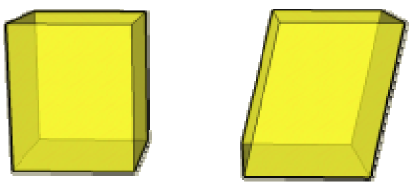
$$V_{\text{tronco de pirámide}} =$$
$$= V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}}$$



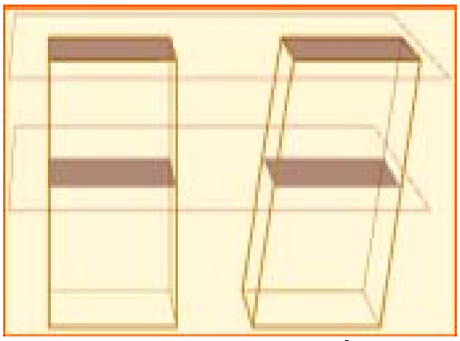
Teorema de Cavalieri. Si dos sólidos tienen la misma altura y las secciones planas paralelas a sus bases, a la misma distancia de éstas, tienen áreas iguales, ambos sólidos tienen el mismo volumen.

Paralelepípedo

El volumen de un **paralelepípedo** coincide con el de un **ortoedro** que tenga la misma altura e igual área de la base.



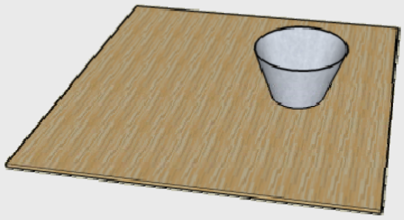
$$V = B \cdot h$$



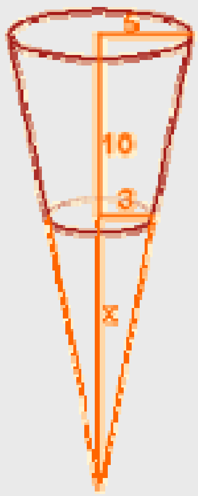
Volumen de un paralelepípedo. Si aplicamos el Teorema de Cavalieri, el volumen de un paralelepípedo será igual que el de un ortoedro que tenga la misma altura e igual área de la base. Las secciones planas tienen áreas iguales.

EJERCICIOS resueltos

14. El recipiente de la imagen tiene 10 cm de altura y los radios de su bases son 3 y 5 cm. ¿Tiene más de un litro de capacidad?



Para resolver este problema se completa el tronco de cono, hasta formar un cono. La capacidad del recipiente será la diferencia entre el volumen del cono grande y el volumen del cono pequeño (el añadido):



$\frac{x}{3} = \frac{x+10}{5}$; 5x = 3(x+10);

5x = 3x + 30; 2x = 30; x = 15

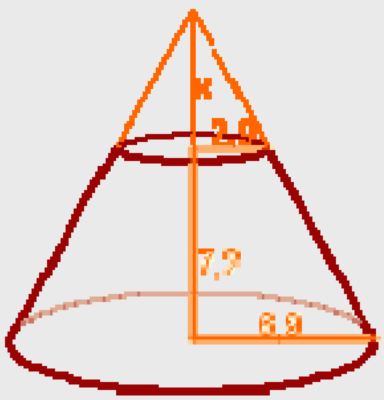
$V_{\text{tronco de cono}} = V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono pequeño}} =$

$$= \frac{3{,}14159 \cdot 5^2 \cdot 25}{3} - \frac{3{,}14159 \cdot 3^2 \cdot 15}{3} =$$

= 654,5 - 141,37= **513,13 cm^3**

No alcanza el litro de capacidad

15. Calcula el volumen de un tronco de cono de 7,2 cm de altura, sabiendo que los radios de sus bases miden 2,9 y 6,9 cm.



$\frac{x}{2{,}9} = \frac{x+7{,}2}{6{,}9}$; 6,9x = 2,9(x+7,2);

6,9x = 2,9x + 20,88; 4x = 20,88;

x = 5,22

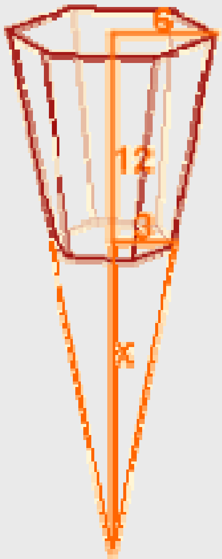
$V_{\text{tronco de cono}} = V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono pequeño}} =$

$$= \frac{3{,}14159 \cdot 6{,}9^2 \cdot 12{,}42}{3} - \frac{3{,}14159 \cdot 2{,}9^2 \cdot 5{,}22}{3} =$$

= 619,22 – 45,97= **573,25 cm^3**

EJERCICIOS resueltos

16. El recipiente de la imagen tiene 12 cm de altura y sus bases son hexágonos regulares de lados 3 y 6 cm y apotemas 2,6 y 5,2 cm. ¿Tiene más de un litro de capacidad?



(En los hexágonos regulares los radios coinciden con los lados)

$\frac{x}{3}=\frac{x+12}{6}$; 6x = 3(x+12);

6x = 3x + 36; 3x = 36; x=12

$V_{\text{recipiente}} = V_{\text{pirámide grande}} - V_{\text{pirámide pequeña}} =$

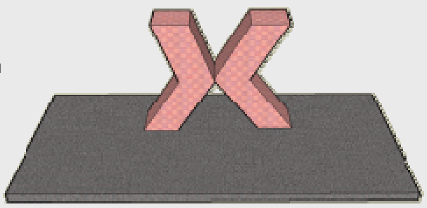
$$= \frac{\left(\frac{6\cdot 6\cdot 5{,}2}{2}\right)\cdot 24}{3} - \frac{\left(\frac{6\cdot 3\cdot 2{,}6}{2}\right)\cdot 12}{3} =$$

= 748,8 - 93,6 = **655,2 cm^3**

No alcanza el litro de capacidad

17. Calcula la altura del edificio de la imagen sabiendo que sus bases son cuadrados de 35 m de lado y que su altura es 115 m.

Aplicando el Teorema de Cavalieri, se puede deducir que El volumen del edifico es el de dos ortoedros con la misma base y la misma altura que éste.



V = $2\cdot 35^2\cdot 115$= **281.750 m^3**

Para practicar

1. Expresa los siguientes volúmenes en litros:

a) 3 dm^3
b) 50 dam^3
c) 1200 cm^3
d) 0,0007 m^3

2. Expresa las siguientes cantidades en cm^3:

a) 0,00001 dam^3
b) 10 dm^3
c) 30000mm^3
d) 1,5 m^3

3. ¿Cuántos vasos de 250 cm^3 se pueden llenar con 0,04 m^3 de agua?

4. Transforma en m^3:

a) 0,006 hm^3
b) 788 dm^3
c) 0,00008 km^3
d) 16000 mm^3

5. Un pantano tiene una capacidad de 450 hm^3. Si actualmente está a un 76% de su capacidad, ¿cuántos metros cúbicos de agua contiene?

6. Expresa:

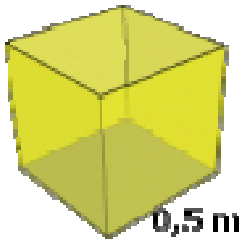
a) 34 hm^3 en km^3
b) 3440 cm^3 en m^3
c) 2,34 km^3 en dam^3
d) 0,000008 dm^3 en mm^3
e) 34567 cm^3 en dm^3
f) 0,02 m^3 en cm^3

7. Me han encargado 6 litros de refresco de naranja. En la tienda sólo quedan botellas de 250 cl. ¿Cuántas tengo que comprar?

8. Da un valor que te parezca razonable para cada una de los siguientes capacidades:

a) Capacidad de un vaso de agua.
b) Capacidad de un pantano grande.
c) Capacidad de una piscina de un chalet.
d) Capacidad del maletero de un coche.

9. ¿Qué cantidad es mayor, medio metro cúbico o el volumen de un cubo de medio metro de arista? Razona la respuesta.



10. Calcula el volumen, en litros, de un cubo de 2 m de arista.

11. Halla el peso de un bloque cúbico de hormigón de 2,3 m de arista. *(Un metro cúbico de hormigón pesa 2350 Kg.)*

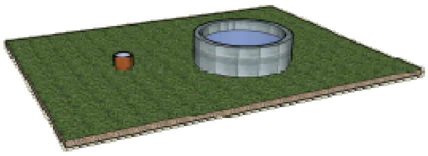
12. Calcula, en litros, el volumen de un *tetrabrik* cuyas dimensiones son 12x7x15 cm.

13. Durante una tormenta se registraron unas precipitaciones de 80 litros por metro cuadrado. ¿Qué altura alcanzaría el agua en un recipiente cúbico de 10 cm de arista?

14. Una piscina tiene unas dimensiones de 7x4x2 m. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenarla dos grifos cuyo caudal es de 70 litros por minuto cada uno?

15. Calcula, en litros, el volumen de un cono que tiene 12 cm de altura y cuya base tiene un radio de 5 cm.

16. ¿Cuántas veces hay que vaciar un cubo cilíndrico de 40 cm de altura y 20 cm de radio para llenar un depósito cilíndrico de 2,5 m de altura y 3 m de radio?



17. Se vierten 2,5 cm^3 de agua en un recipiente cónico cuya base tiene 1,7 cm de radio y una altura de 2,8 cm. ¿Qué porcentaje de la capacidad del recipiente llenamos?

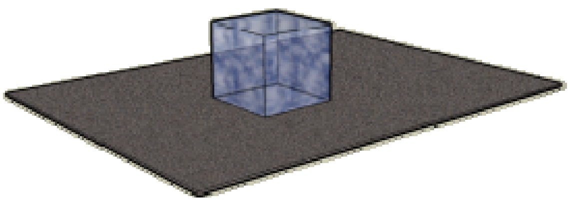
18. ¿Cuántos vasos cilíndricos de 19 cm de altura y 2,7 cm de radio se pueden llenar con 3,8 litros de refresco?

19. Introducimos una bola de plomo, de 0,6 cm de radio, en un recipiente cilíndrico de 3,1 cm de altura y 0,9 cm de radio. Calcula el volumen de agua necesario para llenar el recipiente.

20. ¿Cuántos metros cúbicos de agua se consumen al vaciar 6 veces al día una cisterna de 7,5 litros durante 30 días?

21. ¿Cuántos litros de agua puede contener un depósito con forma de ortoedro, si sus medidas interiores son 189x60x58 cm?

22. ¿Qué cantidad de agua se obtiene al derretir un bloque cúbico de hielo de 31,4 cm de arista? *(La densidad del bloque de hielo es 0,917 g/cm^3)*.



23. ¿Cuántos peces, pequeños o medianos, podemos introducir en un acuario cuyas medidas interiores son 129x51x47 cm? *(Se recomienda introducir, a lo sumo, un pez, pequeño o mediano, cada cuatro litros de agua)*.

24. ¿Cuánto tiempo tardará un grifo en llenar un depósito si vierte 130 litros de agua por minuto? El depósito es un prisma de 3,6 m de altura y base hexagonal, de 2 m de lado y 1,7m de apotema.

25. Calcula el peso, en toneladas, de una pirámide de hormigón, con una base cuadrada de 6 m de lado y 17 m de altura. Un metro cúbico de hormigón pesa 2,35 toneladas.

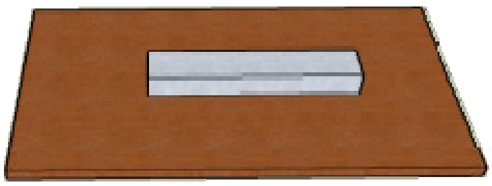
26. Calcula el volumen de un tronco de cono de 6,1 cm de altura, sabiendo que los radios de sus bases son 6,1 cm y 3,8 cm.

27. Halla el volumen, en litros, de una esfera de 25 cm de radio.

28. Un paralelepípedo tiene una altura de 12 cm y sus bases son rombos cuyas diagonales miden 7 cm y 4 cm. Calcula su volumen.

29. Se vierten 150 cm^3 de agua en un vaso cilíndrico de 4 cm de radio. ¿Qué altura alcanzará el agua?

30. Calcula el peso en gramos de un lingote de plata de 24x4x3 cm. La densidad de la plata es 10,5 g/cm^3.



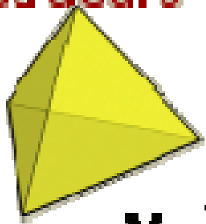
31. La etiqueta lateral de papel, que rodea completamente una lata cilíndrica de tomate frito, mide 25x13 cm. Calcula el volumen de la lata.

32. Calcula el peso de un cable cilíndrico de cobre de 2 mm de diámetro y 1350 m de longitud, sabiendo que la densidad del cobre es 8,9 g/cm^3.

Para saber más

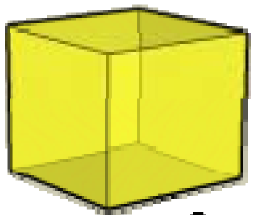
VOLUMEN DE LOS POLIEDROS REGULARES

Tetraedro



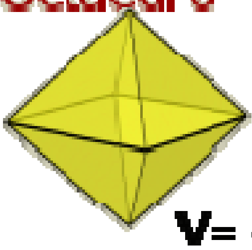
$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot a^3$$

Cubo



$$V=a^3$$

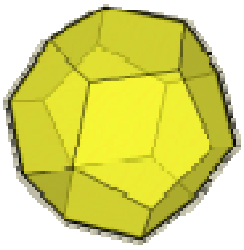
Octaedro



$$V=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot a^3$$

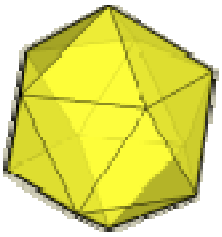
a=longitud de las aristas

Dodecaedro



$$V=\frac{1}{4}\cdot\left(15+7\sqrt{5}\right)\cdot a^3$$

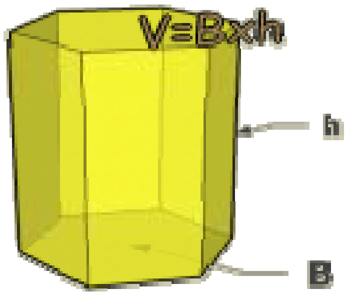
Icosaedro

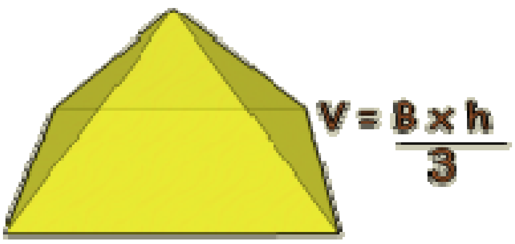


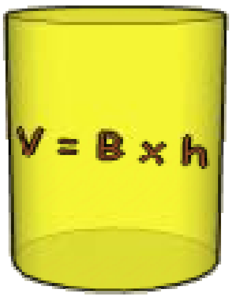
$$V=\frac{5}{12}\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot a^3$$

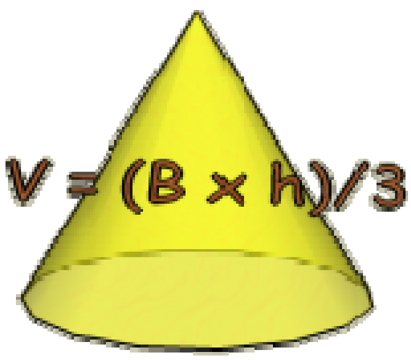
Recuerda
lo más importante

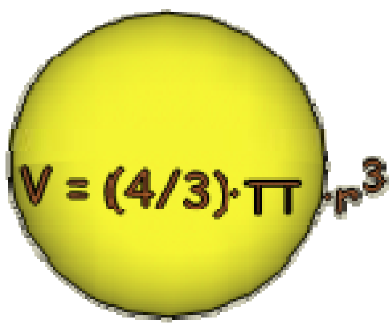
VOLUMEN DE LOS CUERPOS ELEMENTALES







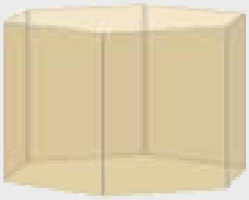




Autoevaluación

2

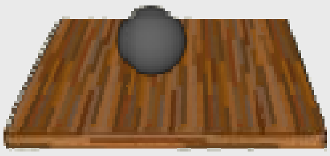
3



4

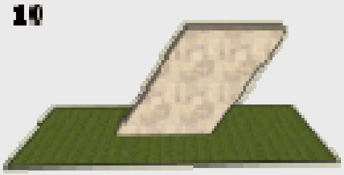
6

8



9

10



1. La capacidad de un pantano es de 295 hm^3. Expresa esta capacidad en litros.

2. Calcula el peso en gramos de un lingote de plata de 19x4x3 cm. La densidad de la plata es 10,5 g/cm^3.

3. Calcula el volumen del prisma de la figura, cuya altura es 4 cm y cuyo lado de la base mide 2,4 cm. La apotema de la base mide 1,6 cm.

4. La apotema de una pirámide regular mide 11 dm y la base es un cuadrado de 15 dm de lado. Calcula su volumen.

5. ¿Cuántos bloques cúbicos de piedra, aproximadamente, de 50 cm de arista, hacen falta para construir una pirámide regular con base cuadrada de 208 m de lado y 101 m de altura?

6. Se echan 19,8 cm^3 de agua en un recipiente cilíndrico de 1,8 cm de radio. ¿Qué altura alcanzará el agua?

7. ¿Cuántas copas puedo llenar con 11 litros de refresco, si el recipiente cónico de cada copa tiene una altura interior de 9 cm y un radio interior de 5 cm?

8. ¿Cuántos kilogramos pesa una bola de plomo de 17 cm de radio? El plomo tiene una densidad de 11,4 g/cm^3.

9. Calcula el volumen de un tronco de cono de 7,6 cm de altura, sabiendo que los radios de sus bases miden 4,9 cm y 2,1 cm.

10. Calcula el volumen de la escultura de la imagen, sabiendo que sus bases son rectángulos de 3 x 12 dm y su altura 20 dm.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) 3 l
b) 50.000.000 l
c) 1,2 l
d) 0,7 l

2. a) 10.000 cm^3
b) 10.000 cm^3
c) 30 cm^3
d) 1.500.000 cm^3

3. 160 vasos.

4. a) 6.000 m^3
b) 0,788 m^3
c) 80.000 m^3
d) 0,000016 m^3

5. 342.000.000 m^3

6. a) 0,034 km^3
b) 0,00344 m^3
c) 2.340.000 dm^3
d) 8 mm^3
e) 34,567 dm^3
f) 20.000 cm^3

7. 24 botellas.

8. a) 250 cm^3
b) 500 hm^3
c) 70 m^3
d) 350 l

9. Medio metro cúbico. Un cubo de medio metro de arista tiene un volumen de 0,125 m^3.

10. 8.000 l

11. 28592,45 kg

12. 1,26 l

13. 8 cm

14. 400 minutos.

15. 0,31 l

16. 1407 veces.

17. 29,5%

18. 8 vasos.

19. 6,99 cm^3 de agua.

20. 1,35 m^3

21. 657,7 l

22. 28,4 l

23. 77 peces

24. 282,5 minutos.

25. 300 m^2

26. 3409,07 TN

27. 478,01 cm^3

28. 168 cm^3

29. 2,98 cm.

30. 3024 g

31. 646,54 cm^3

32. 37,75 kg

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 295.000.000.000 l

2. 2.394 g

3. 46,08 cm^3

4. 603,75 dm^3

5. 11.652.437 bloques aprox.

6. 1,95 cm

7. 46 copas

8. 234,6 kg

9. 308,08 cm^3

10. 720 dm^3

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

11 Funciones.

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Comprender, distinguir y valorar el concepto de función
- Interpretar y relacionar tabla, gráfica y fórmula de una relación funcional
- Distinguir los conceptos de variable dependiente e independiente, dominio y recorrido
- Apreciar e interpretar sobre una gráfica las primeras propiedades generales de una función
- Distinguir, formular y representar situaciones mediante una función de proporcionalidad directa e inversa.

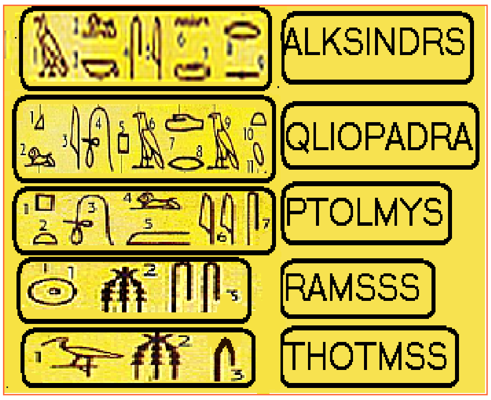
Antes de empezar

La Piedra Roseta encierra un documento escrito de tres formas distintas. En la parte superior (jeroglíficos), en la central, (demótico) dos formas de escritura de una lengua muerta, el egipcio. En la parte inferior aparece la misma inscripción en griego. Esto último y la genialidad de Champollión permitió encontrar las claves de las correspondencia entre los signos jeroglíficos y sus imágenes fonéticas.

Piedra Roseta

Detalle de la escritura jeroglífica

Alguno de los "cartuchos" que ayudaron a descifrarlos equivalentes fonéticos de la escritura egipcia.



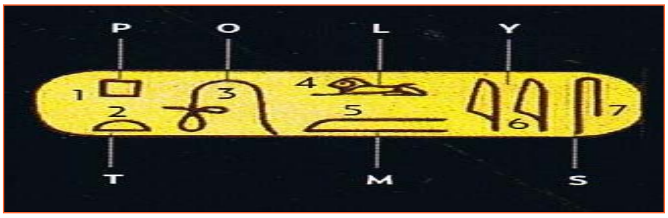
Clave Alejandro

Clave Cleopatra

Clave Ptolomeo

Clave Ramses

Clave Thumosis



Contenidos

1. Relaciones funcionales

Expresión de una relación funcional.

Se dice que una correspondencia entre dos conjuntos es una relación funcional, cuando a cada elemento del primer conjunto se le hace corresponder de forma única un elemento del segundo.

Observa los ejemplos de estas situaciones.

Ejemplo

Tabla de valores

La libra es una media de peso de origen anglosajón. En la siguiente tabla se da la equivalencia en kilogramos de distintas medidas en libras.

Peso en libras	Peso en kilogramos
2	0´90
3	1´35
4	1´80
x	f(x)

A cada valor en el peso de libras, el primer conjunto, le corresponde un **único** valor en el peso de kilogramos, el segundo conjunto.

De forma general diremos que a x peso de libras le corresponde f(x) peso de kilogramos.

En el ejemplo anterior hemos visto la tabla de valores como una forma de expresar una relación funcional. Veamos otras.

Entre las distintas formas de expresar una relación funcional, podemos señalar:

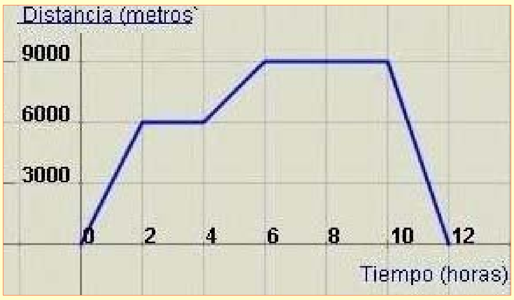
- Mediante una tabla.
- Mediante una gráfica.
- Mediante una fórmula.

La tabla de valores, la representación gráfica y la formulación mediante una expresión algebraica constituyen las formas habituales de expresar la dependencia entre dos magnitudes.

Ejemplo

La representación gráfica

La gráfica siguiente representa la distancia a la que se encuentra Juan de su casa a lo largo del día. Juan coge el coche, va durante un tiempo, desayuna y lee la prensa sigue un rato hasta la casa de unos amigos que le han invitado a comer. Después de un tiempo regresa rápido ya que se ha hecho un poco tarde.



Si salió a las 9 de la mañana, ha estado fuera 12 horas, así que volvió a las 21:00 horas.
Podemos también afirmar que en casa de sus amigos estuvo 4 horas, desde la hora 6 a la hora 10 del tiempo transcurrido, es decir, desde las 15:00 horas hasta las 19:00 horas.
También que la casa de Juan está a 9000 metros.

Nuevamente observa que para cada valor en el eje *Tiempo*, existe un único valor en el eje de *Distancia*.

Ejemplo

Expresión algebraica.

Una fórmula nos hace pensar siempre en un secreto, una serie de caracteres capaces de encerrar una gran cantidad de información disponible para el que la descifre.
En matemáticas una formula es una expresión algebraica que describe la relación funcional y que permite mediante una simple sustitución calcular el transformado de una determinado valor.

f(x)= 3x-1	f(-2)=-7
	f(-1)=-4
	f(2)=5
	f(3)=8

Ejemplo

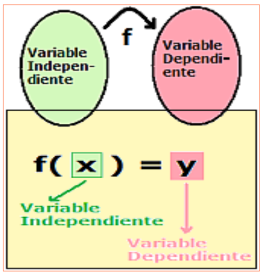
Las "tablas de precios" constituyen una de las aplicaciones más habituales de las funciones definidas mediante tabla.
En el ejemplo se puede observar la identificación de la variable independiente y la dependiente.

Tiempo (minutos)	Precio (euros)
<= 30	0.50
entre 31 y 60	1
entre 61 y 90	1.20
entre 91 y 120	1.50

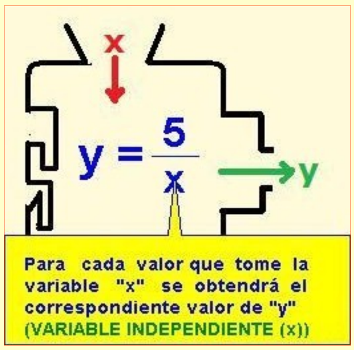
Por cada tiempo en minutos tendremos que pagar una cantidad. (VARIABLE INDEPENDIENTE: TIEMPO)

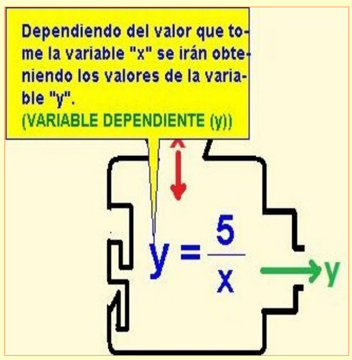
Variable dependiente e independiente.

En una relación funcional, a la magnitud que depende de la otra se la denomina *variable dependiente*, a esta segunda magnitud se la denomina *variable independiente.*



La fórmula es una expresión algebraica que relaciona dos variables.





Ejemplo

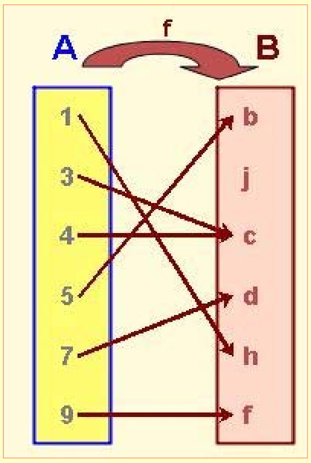
La gráfica representa la distancia en metros a la que se encuentra una persona de sus casa a lo largo de 6 horas de tiempo.

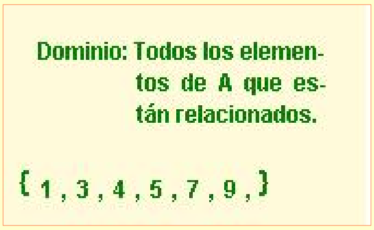
Dominio y recorrido.

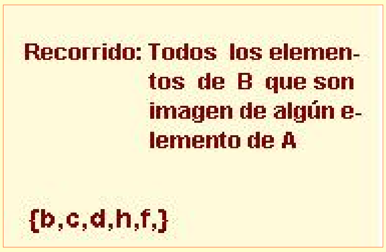
El *dominio* o *campo de existencia* de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente.

El *recorrido*, *imagen* o *rango* de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente.

Vemos el siguiente ejemplo entre dos conjuntos.







Observa como hay un elemento del conjunto B, elemento j, que no pertenece al recorrido, ya que no es imagen de ningún elemento del dominio.

Puede haber elementos de B que sean imagen de más de un elemento de A.

Ejercicio resuelto

1. La tabla representa valores de una función. Completa los huecos que faltan.

SOLUCIÓN:

Observa que las imágenes de cada valor se van obteniendo multiplicando por 2 y sumando después 5.

x	f(x)
4	13
5	15
6	17
8	21
9	23

Para calcular la imagen de 8:

$2 \cdot 8 + 5 = 21$

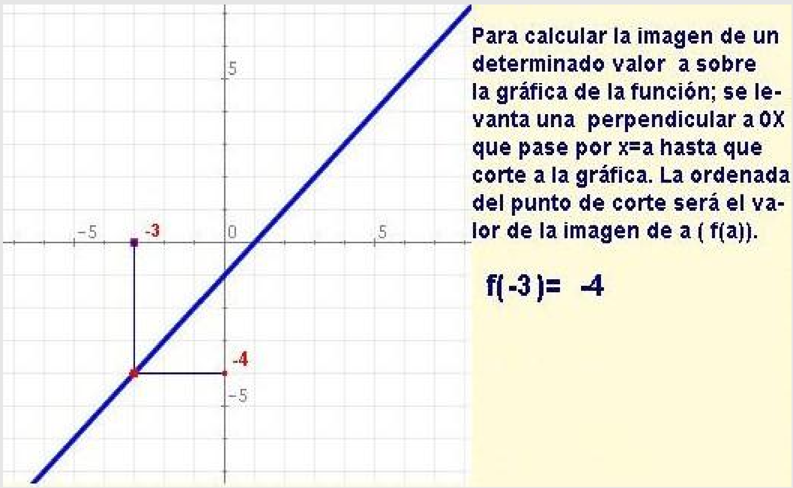
Para calcular la antiimagen de 23:

$$\frac{23-5}{2} = 9$$

Ejercicios resueltos

2. Calcula en la siguiente gráfica f (– 3).

SOLUCIÓN:



3. Haz una tabla de valores para la función f(x) = 1x+1, y luego dibuja su gráfica de puntos.

SOLUCIÓN:

Si una función tiene por fórmula f(x) = 1 x+1
Las imágenes de los valores de la tabla se obtienen:

$f(2)=1.2+1 = 3$

$f(3)=1.3+1 = 4$

$f(4)=1.4+1 = 5$

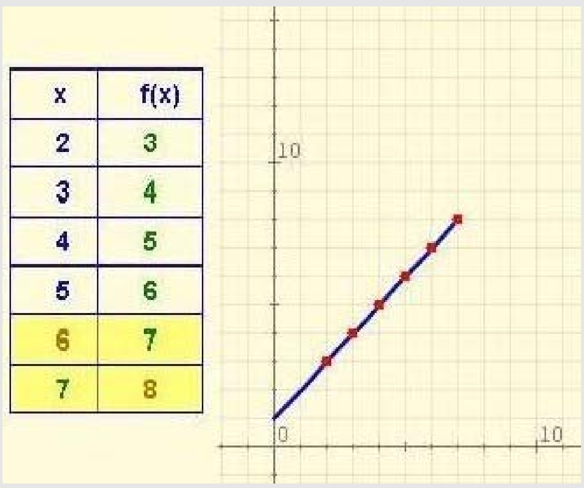
$f(5)=1.5+1 = 6$

$f(6)=1.6+1 = 7$

Por último, para la preimagen si $1x+1 = 8$

$1\,x= 8-1$

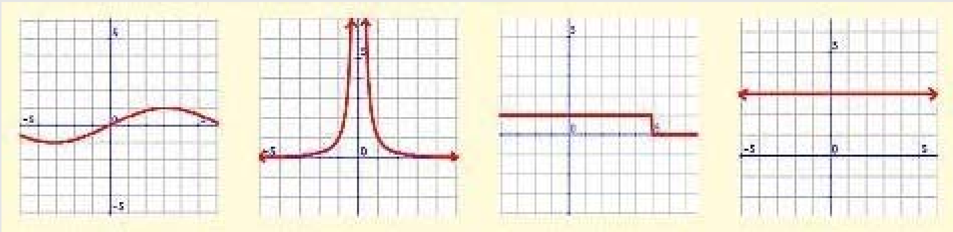
$x = \frac{8-1}{1} = 7$



x	f(x)
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8

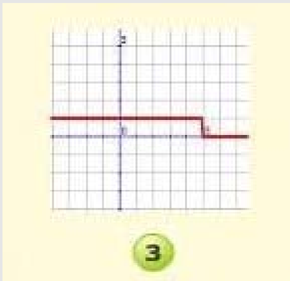
Ejercicios resueltos

4. Entre las siguientes representaciones gráficas hay una que no corresponde a una función.



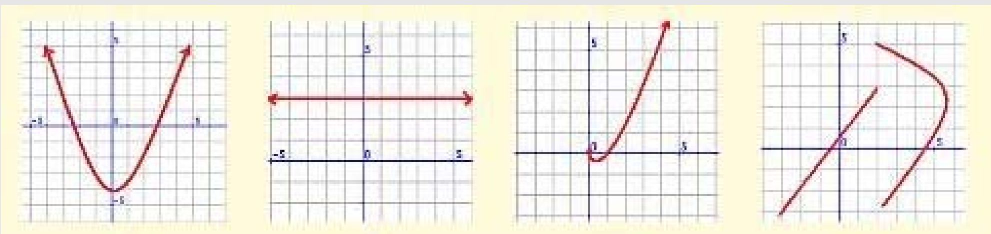
SOLUCIÓN:

Hay al menos un valor de *x* al que corresponde más de una imagen, y por tanto



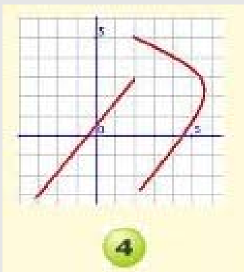
no es función.

5. Entre las siguientes representaciones gráficas hay una que no corresponde a una función.



SOLUCIÓN:

Hay al menos un valor de *x* al que corresponde más de una imagen, y por tanto no es función.



Ejercicios resueltos

6. Halla el dominio de $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x^2+2}$

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \frac{3x+4}{2x^2+2}$$

El único problema de la fórmula está en el denominador. Se puede dividir entre cualquier número excepto entre 0. Es decir $(2x^2+2)$ debe ser distinto de cero. Por tanto:

El dominio será el CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES EXCEPTO LOS VALORES QUE ANULAN EL DENOMINADOR.

$2x^2+2 \rightarrow 2x^2 = -2 \rightarrow x = \sqrt{\dfrac{-2}{2}}$

NO EXISTE LA RAÍZ DE UN NÚMERO NEGATIVO. Por tanto:

Domf ≡ R

7. Halla el dominio de $f(x) = \dfrac{4x+4}{x+5}$

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \frac{4x+4}{x+(5)}$$

El único problema de la fórmula está en el denominador. Se puede dividir entre cualquier número excepto entre 0. Es decir $(x+(5))$ debe ser distinto de cero. Por tanto:

El dominio será el CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES EXCEPTO LOS VALORES QUE ANULAN EL DENOMINADOR.

$x+(5) = 0 \rightarrow x = -5 \rightarrow$ Domf ≡ $\mathbb{R} - \{-5\}$

Ejercicios resueltos

8. Halla el recorrido de f(x)=2x+1

SOLUCIÓN:

$$f(x) = 2x+1$$

Veamos cuando tiene sentido $2x+1 = r$ *(siendo r un elemento genérico del recorrido)*

$2x+1 = r \rightarrow 2x = r-1 \rightarrow x = \frac{r-1}{2}$ Esta expresión tiene sentido siempre, por tanto:

El recorrido de la función es $\mathbf{R}$

9. Halla el recorrido de $f(x) = \dfrac{4}{x+4}$

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \frac{4}{x+(-4)}$$

Veamos cuando tiene sentido $\frac{4}{x+(-4)} = r$ *(siendo r un elemento genérico del recorrido)*

$\frac{4}{x+(-4)} = r \rightarrow 4 = r.(x+(-4)) \rightarrow \frac{4}{r} = x+(-4)$

$\frac{4}{r} - (-4) = x \rightarrow$ La expresión tiene sentido cuando r es distinto de cero, por tanto:

El recorrido de la función es $\mathbf{R} - \{0\}$

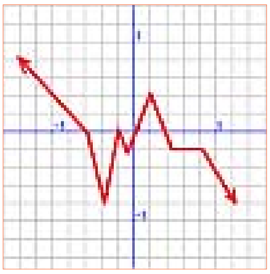
2. Representación gráfica

Gráfica de una función.

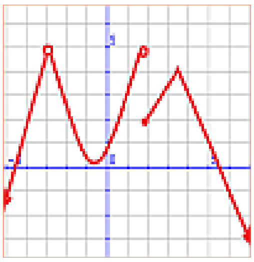
Para representar gráficamente una función, se forma la tabla de valores correspondiente. Cada pareja se identifica con un punto del plano cartesiano de forma que:

- La variable independiente x se representa en el eje de abscisas.
- La variable dependiente y se representa en el eje de ordenadas.

Según el tipo de función podrás unir los puntos obtenidos.



O no unirlos, según el planteamiento de la situación tratada.

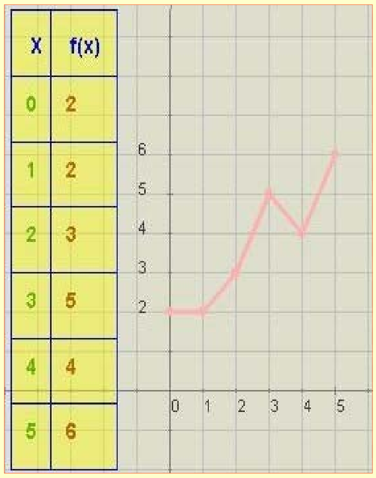


La representación gráfica de una función es una ayuda fundamental para el estudio de propiedades de la misma que no son evidentes en una tabla o una fórmula. Hablamos de conceptos tan visuales como crecimiento, decrecimiento, máximo y mínimos.

Dichos conceptos, que veremos más adelante, tienen una aplicación directa en la interpretación de la evolución de muchos procesos.

A partir de una tabla:

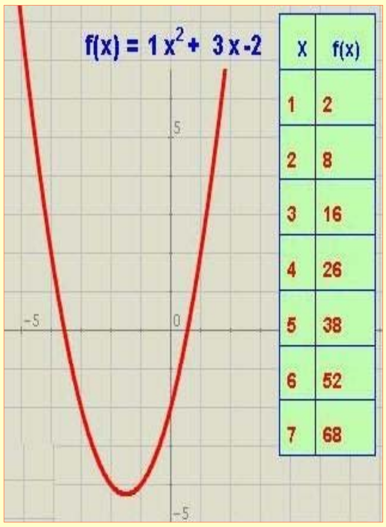
Situamos los puntos sobre la gráfica, posteriormente los unimos o no según sea el caso.



X	f(x)
0	2
1	2
2	3
3	5
4	4
5	6

A partir de una fórmula:

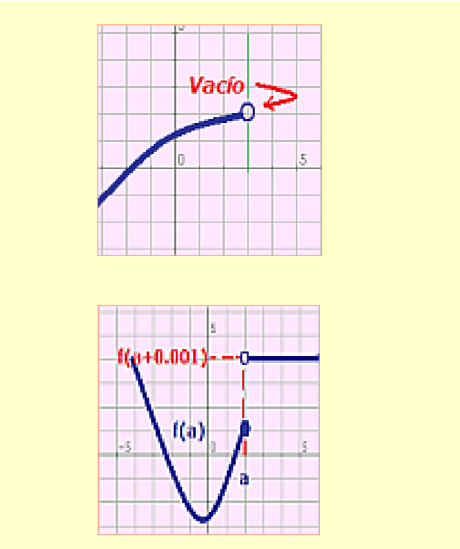
Calculamos el valor de algunos puntos, así que realizamos una tabla de valores.



X	f(x)
1	2
2	8
3	16
4	26
5	38
6	52
7	68

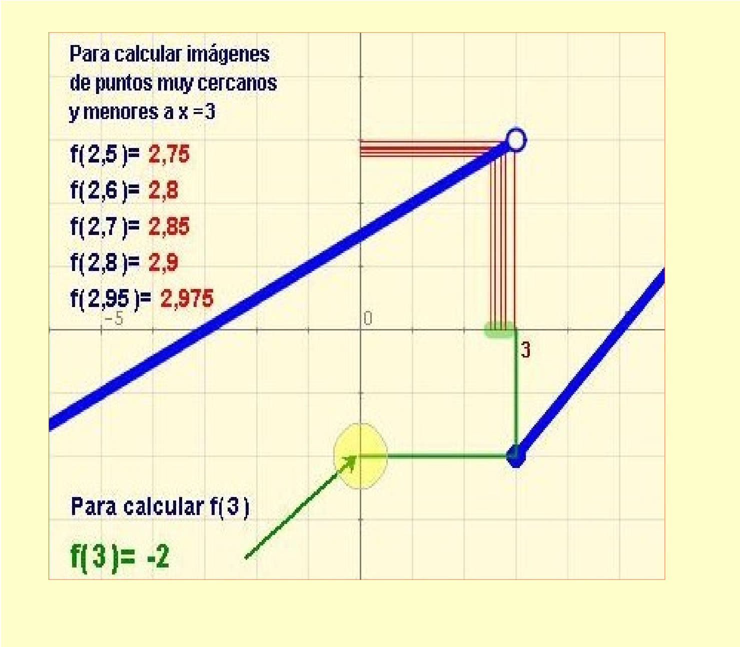
Unos símbolos muy útiles.

En la representación gráfica de algunas funciones se utilizan símbolos que ayudan a la comprensión de lo que pasa en un punto, o cerca de de él (en su entorno).
Está generalizado el uso de *un punto en blanco* para indicar que ese punto no forma parte de la gráfica y un *punto relleno* cuando sí lo es.



En el siguiente ejemplo puedes comprobar la utilidad de los símbolos dados.

Tomamos valores muy cercanos al punto del que queremos saber su valor en f(x). Obtendremos dos valores laterales, uno por la derecha y otro por la izquierda. Ahora es cuando se debe prestar atención al punto en blanco.



Observa que no se obtiene el mismo resultado si aproximamos acercándonos por la derecha.

Ejercicio resuelto

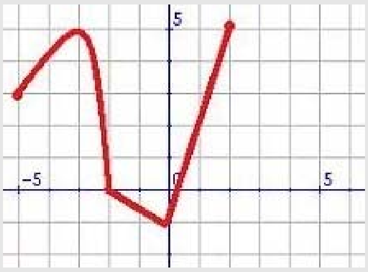
10. Representa la gráfica siguiente uniendo sus puntos.

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	2	2	1	2

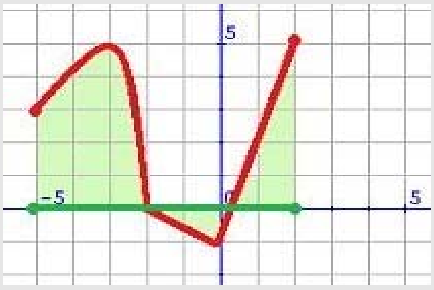
SOLUCIÓN:

Ejercicios resueltos

11. Expresa en forma de intervalo y sobre la gráfica de la función cuál es su dominio.

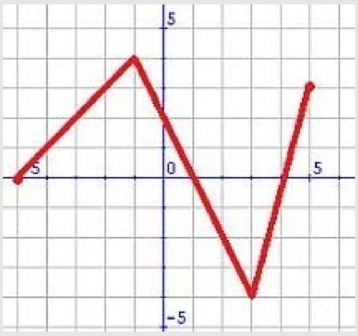


SOLUCIÓN:

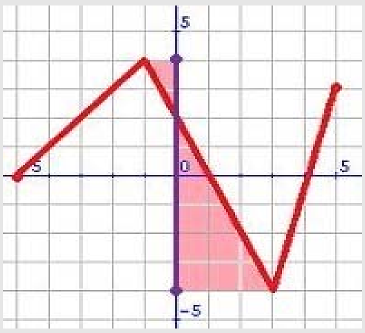


Todos los valores reales entre – 5 y 2, ambos incluidos, es decir, – 5 ≤ x ≤ 2.

12. Expresa en forma de intervalo y sobre la gráfica de la función cuál es su recorrido.



SOLUCIÓN:



Todos los valores reales entre – 5 y 4, ambos incluidos, es decir, – 5 ≤ y ≤ 4.

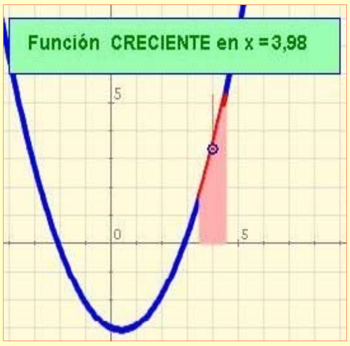
3. Propiedades generales

Crecimiento y decrecimiento.

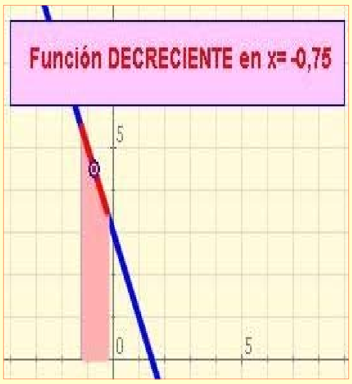
El crecimiento y decrecimiento de una función son conceptos *locales.* Una función puede ser creciente en un punto y decreciente en otro. Por ello lo que tenemos es que fijarnos en lo que ocurre en la cercanía de cada punto, en su *entorno*.

Ejemplos

En un entorno de $x=3'98$, si vemos la gráfica, el dibujo va "subiendo".



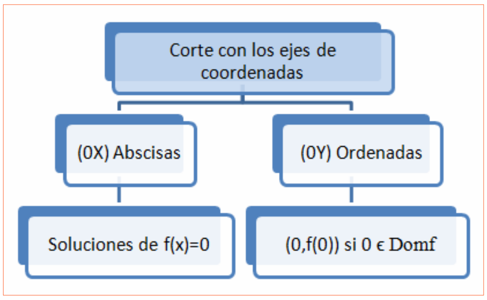
En un entorno de $x=0'75$, si vemos la gráfica, el dibujo va "bajando".



Corte con los ejes.

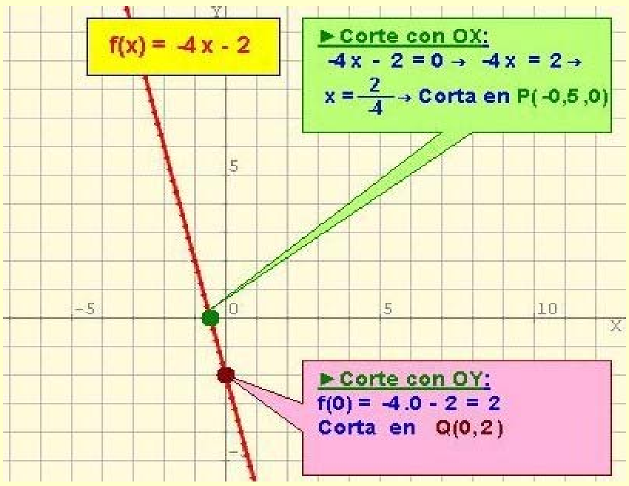
Es muy importante y ayuda especialmente en el conocimiento de la gráfica de una función, localizar los puntos de corte con los ejes de coordenadas. Una función corta a lo sumo en un punto al eje de ordenadas (0,f(0)) (en caso de que x=0 pertenezca al dominio de f.

Una función puede cortar al eje de abscisas cualquier número de veces (incluso infinitas) tantas como soluciones tenga f(x) = 0.

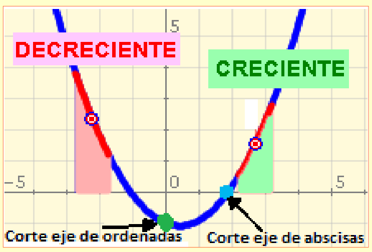


Ejemplo

Calcula los puntos de corte con los ejes de la función:
f (x) = − 4x − 2



RESUMEN

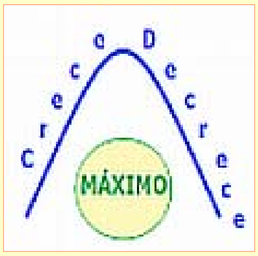


Decreciente en un punto cuando "baja" en todos los puntos de su entorno.

Creciente en un punto cuando "sube" en todos los puntos de su entorno

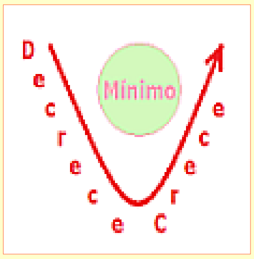
Máximos y mínimos relativos.

Una función presenta un *máximo* en un punto si es creciente a la izquierda de ese punto y decreciente a la derecha.



Un máximo es análogo a la cima de una montaña.

Una función presenta un *mínimo* en un punto si es decreciente a la izquierda de ese punto y creciente a la derecha.



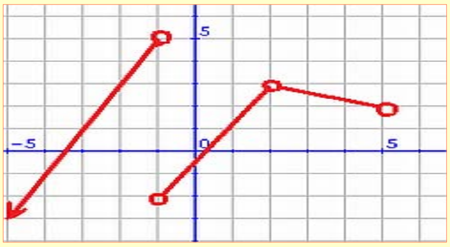
Un mínimo es análogo al punto más bajo en un valle.

En la misma función puede tener varios máximos (análogo para mínimos), por eso se denominan *relativos*.
Al mayor de los máximos (al menor de los mínimos) se le llama *máximo absoluto (mínimo absoluto)*. Este es único ya que es absoluto en la función.

*Tenemos que un cambio de creciente a decreciente o viceversa es la característica para un **posible** extremo, máximo o mínimo.*

Ejemplo

Esta gráfica no tiene extremos.



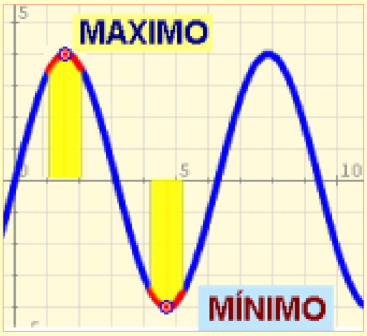
Ejemplo

En la siguiente gráfica de la función podemos observar los conceptos de máximos y mínimos.

En el punto (1´5, 4) analizamos máximos.

Para *x= 1´5*, tenemos que *f(1´5) = 4.* Tal y como aparece en la gráfica, en un entorno de *x=1´5*, los valores de la función son menores a *f(1´5) = 4*, queda claro que en un alrededor de *(1´5,4)* cualquier punto se encuentra gráficamente por debajo de este, tanto a la derecha como a la izquierda. Resulta ser un máximo.

Observa también que a la izquierda del máximo la función es creciente y a su derecha decreciente.



Análogo como un mínimo para el punto *(4´5,– 4)*.
Cualquier valor que demos en un entorno cercano de dicho punto alcanza valores de f(x) mayores que – 4, es decir, el valor que alcanza en f(x), x= 4´5, es el menor en dicho entorno.

Observa también que a la izquierda del mínimo la función es decreciente y a su derecha creciente.

Ejercicios resueltos

13. Calcula los puntos de corte con los ejes de las funciones siguientes:

a) $f(x)=4x+1$ b) $f(x)=x^2-8x+15$ c) $f(x)=\dfrac{5}{x}$

SOLUCIÓN:

a)

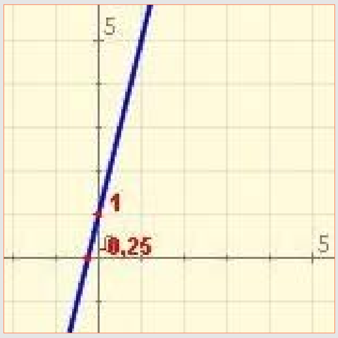
$f(x) = 4x+1$

CORTE CON OX $\rightarrow$ $4x+1=0 \rightarrow 4x=-1 \rightarrow x=\dfrac{-1}{4}$

La función corta a OX en el punto $\left(\dfrac{-1}{4}, 0\right)$

CORTE CON OY $\rightarrow$ $f(0) = 4 0+1 \rightarrow f(0)=1 \rightarrow$ Por tanto

La función corta a OY en $(0, 1)$



b)

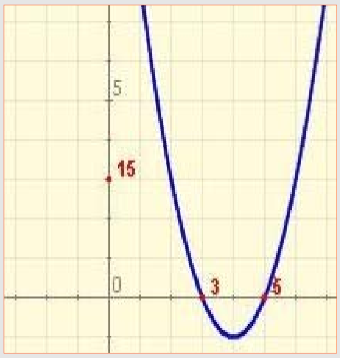
$f(x) = x^2 - 8x+15$

CORTE CON OX $\rightarrow$ $x^2 - 8x+15=0 \rightarrow x=\dfrac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} \rightarrow$

$x=5$, $x=3$ La función corta a OX en $(5, 0)$ y en $(3, 0)$

CORTE CON OY $\rightarrow$ $f(0)=0^2-8.0+15 \rightarrow f(0)=15 \rightarrow$ Por tanto

La función corta a OY en $(0, 15)$



c)

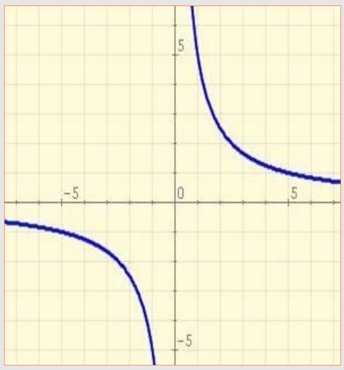
$f(x) = \dfrac{5}{x}$

CORTE CON OX $\rightarrow$ $\dfrac{5}{x}=0 \rightarrow 5=0 \rightarrow$ Imposible; por tanto

La función no corta a OX

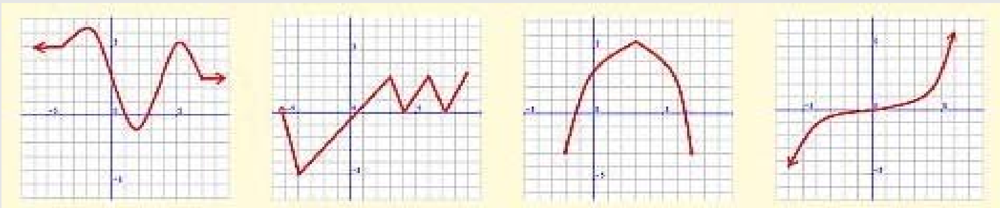
CORTE CON OY $\rightarrow$ $f(0)=\dfrac{5}{0} \rightarrow f(0)=$ *No se puede calcular* $\rightarrow$ Por tanto

La función no corta a OY

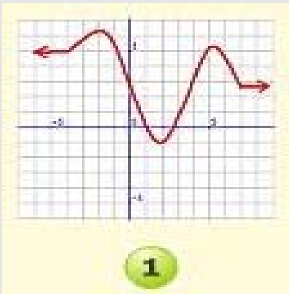


Ejercicios resueltos

14. Entre las siguientes funciones indica la que correspondería a una función decreciente en el punto de abscisa x=0.

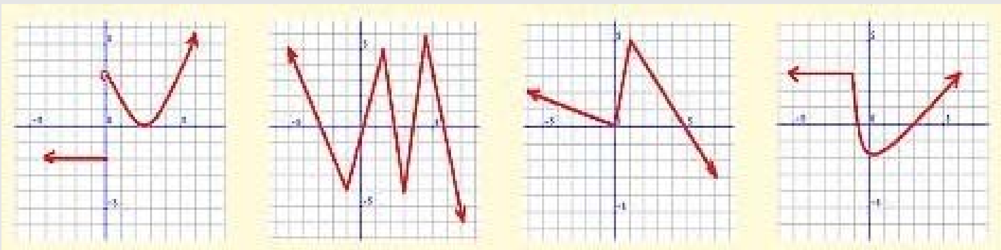


SOLUCIÓN:

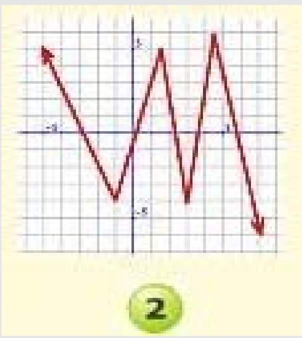


En un entorno del 0 la función baja

15. Entre las siguientes funciones indica la que correspondería a una función creciente en el punto de abscisa x=0.



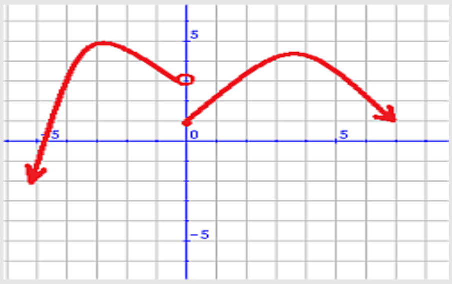
SOLUCIÓN:



En un entorno del 0, se cumple la función sube

Ejercicios resueltos

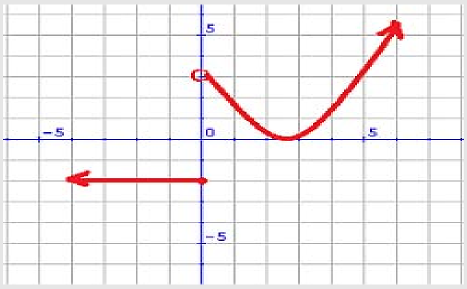
16. Indica las coordenadas del punto en el que creas que la función alcanza un máximo.



SOLUCIÓN:

Hay dos máximos relativos, $M_1 = (-2´75,5)$ y $M_2 = (3´5,4´25)$

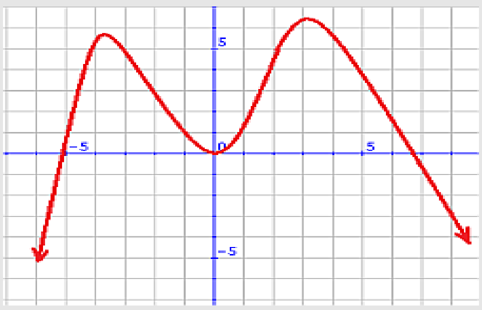
17. Indica las coordenadas del punto en el que creas que la función alcanza un mínimo.



SOLUCIÓN:

Hay un mínimo, $m_1 = (2´5,0)$.

18. Indica las coordenadas del punto en el que creas que la función alcanza un extremo.



SOLUCIÓN:

Hay un mínimo, $m_1 = (0,0)$, y dos máximos $M_1=(-3´75,5´75)$, $M_2=(3´25,6´25)$.

4. Primeras funciones elementales

Función de proporcionalidad directa.

En muchas situaciones dos variables están relacionadas de manera que cuando una aumenta la otra lo hace también y análogamente cuando disminuye, guardando siempre la misma relación. Son magnitudes directamente proporcionales.

Ejemplo

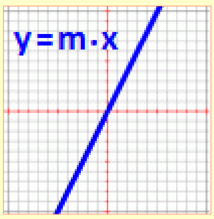
Imagina que este fin de semana decides hacer una excursión en bicicleta, con una velocidad constante de 10 km/h, y que conduces con tu bicicleta durante 2 horas, el espacio recorrido es de 20 km. ¿Qué pasaría si fueras a más velocidad durante el mismo tiempo?

Para un tiempo determinado:

A más velocidad más espacio recorrido.

A menos velocidad menos espacio recorrido.

Las funciones que relacionan este tipo de magnitudes se denominan funciones de proporcionalidad directa. Su gráfica sigue siempre un mismo patrón: una recta que pasa por el origen de coordenadas.



A más, más
y
menos, menos"

El valor de "m" se corresponde con la constante de proporcionalidad directa.

Ejemplo

Planteamos el problema y lo resolvemos de forma algebraica.

Por 4 Kg de manzanas hemos pagado 6,40 euros. Para calcular el precio de 1 Kg de ellas:

4 Kg ---------------▶ 6,40 euros
1 Kg ---------------▶ x

$$x = \frac{1 \cdot 6,40}{4,00} = 1,6 \quad \text{euros/Kg}$$

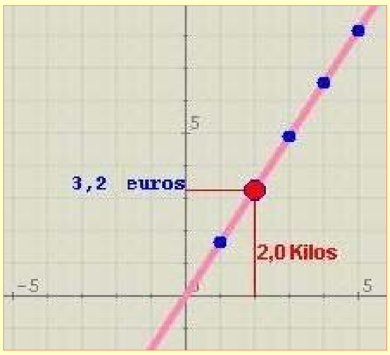
La función que permite calcular el precio de cualquier cantidad sería:

$$f(x) = 1,6 \cdot x$$

Podemos construir una tabla con la constante de proporción m=1´6. A más kilogramos más euros necesito.

x	f(x)
1,0	1,6
2,0	3,2
3,0	4,8
4,0	6,4
5,0	8,0

Si la representamos gráficamente, obtendremos una recta, de la que podemos interpolar datos.

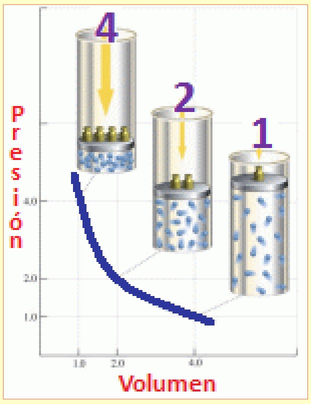


Función de proporcionalidad inversa.

En muchas situaciones se observa que dos variables están relacionadas de manera que cuando una aumenta la otra disminuye, pero en todo momento su producto es constante. Son magnitudes inversamente proporcionales.

Ejemplo

Si quieres puedes hacer la prueba con una bolsa llena de papeles, a mayor presión hagas sobre los papeles, estos se irán aplastando y ocupando menos volumen.



A temperatura constante:

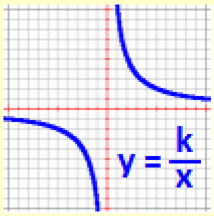
P V=k

A más presión menos volumen

A menos presión más volumen

Las funciones que relacionan este tipo de magnitudes se denominan funciones de proporcionalidad inversa.

Su gráfica sigue siempre un mismo patrón: la hipérbola.



"A más, menos y a menos, más"

El valor de "k" se corresponde con la constante de proporcionalidad inversa.

Ejemplo

Planteamos el problema y lo resolvemos.

6 náufragos disponen de agua para 10 días. si queremos ver para cuanto tiempo tendría uno.

6 náufragos --------------► 10 días
1 náufragos --------------► x

x = 60 días

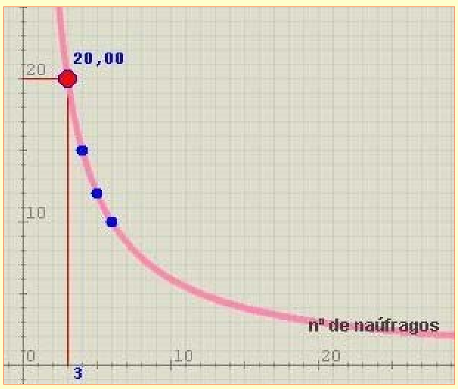
La función que permite relacionar las dos magnitudes sería:

$$f(x) = \frac{60}{x}$$

Podemos construir una tabla con la constante de proporción k=60. A menos náufragos más días.

f(x)	30	20	15	12	10
x	2	3	4	5	6

Si la representamos gráficamente, obtendremos la rama de una hipérbola.



Ejercicios resueltos

19. Clasifica la relación entre las magnitudes siguientes:

Velocidad y tiempo en hacer un recorrido, gasto de luz y kilovatios consumidos, radio y longitud de la circunferencia, altura y peso de una persona, presión y volumen que ocupa un gas, velocidad y espacio en un tiempo fijo.

SOLUCIÓN:

	INVERSA	DIRECTA	NINGUNA
Velocidad y tiempo en hacer recorrido	X		
Gasto de luz y kilovatios consumidos		X	
Radio y longitud de circunferencia		X	
Altura y peso de una persona			X
Presión y volumen que ocupa un gas	X		
Velocidad y espacio en un tiempo fijo		X	

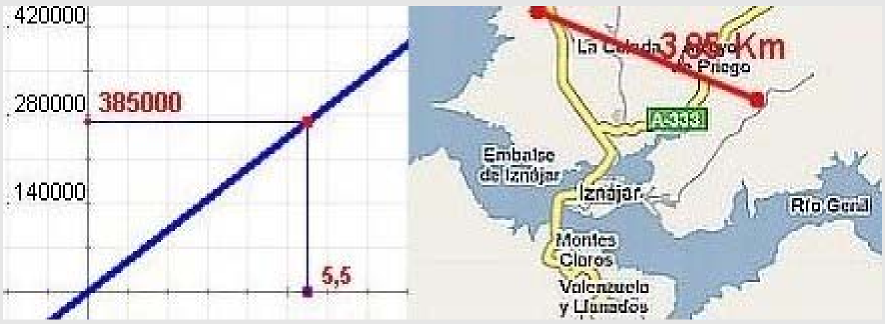
20. Un mapa tiene por escala 1:70000. Cualquier distancia en el mapa se traduce en su correspondiente realidad y viceversa.

1. Escribe la función que relaciona dicha distancia y represéntala gráficamente.
2. Calcula la distancia correspondiente a 5´50 cm en el mapa.

SOLUCIÓN:

a) a función sería f(x) = 70000·x (cada unidad en el mapa se convierte en 70000), a más cm en el mapa más distancia en la realidad. Proporcionalidad directa.

b) a distancia del mapa de 5´50 cm corresponde con f(5´50), resulta:
f(5´50) = 70000·5´50=385000 cm = 3´85 km



Ejercicios resueltos

21. Un grifo de caudal fijo llena un depósito en 6 horas. Si en lugar de uno hubiera 4 grifos.

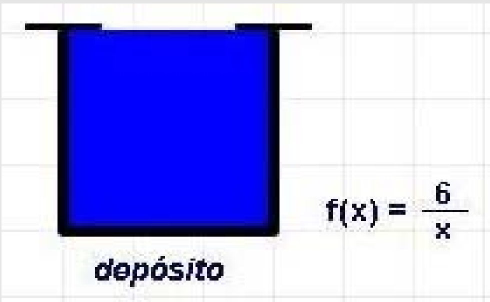
a) Escribe y representa la función que corresponde a la relación entre el número de grifos y el tiempo que tarda en llenar el depósito.
b) ¿Cuánto tiempo tardaría?

SOLUCIÓN:

a)

Hay más grifos para llenar el depósito, tardará menos tiempo en llenarse, por lo tanto, es una proporcionalidad inversa.

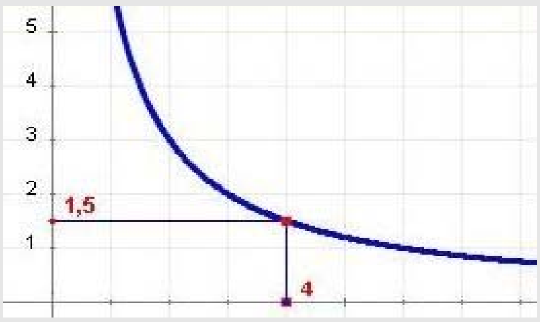
La función sería $f(x) = \frac{6}{x}$



b)

El tiempo para 4 grifos, es el resultado que corresponde a f (4).

$$f(x) = \frac{6}{4} = 1\text{'}5 \text{ horas}$$



Para practicar

1. Completa los valores de la siguiente tabla:

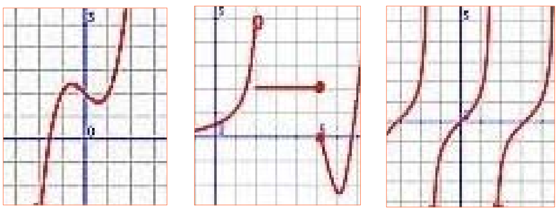
x	4	5	6	8	
f(x)	12	14	16		22

2. Con la función *f (x) = 2x+1* calcula la imagen de − 5. Dibuja la gráfica de esa función.

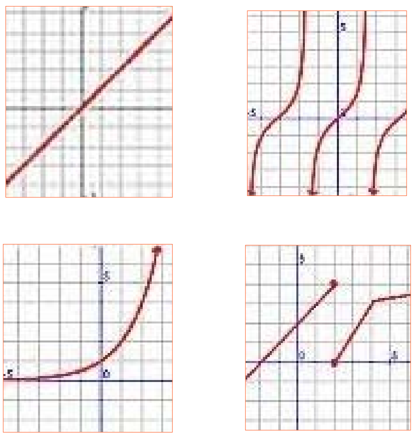
3. Completa la tabla de valores correspondiente a la función *f (x) = 4x+3*. Dibuja la gráfica de esa función.

x	2	3	4	5	
f(x)					31

4. Entre las siguientes gráficas hay una que no corresponde a la de una función. Justifica cuál es la gráfica.



5. Entre las siguientes gráficas hay una que no corresponde a la de una función. Justifica cuál es la gráfica.



6. Calcula el dominio de la función:

$$f(x)=2x^3+x^2+5x+5$$

7. Calcula el dominio de la función:

$$f(x)=\frac{4x+2}{x-3}$$

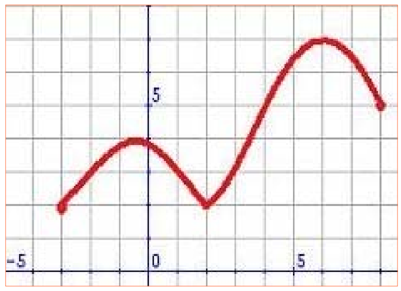
8. Calcula el recorrido de la función:

$$f(x)=\frac{-5}{x}$$

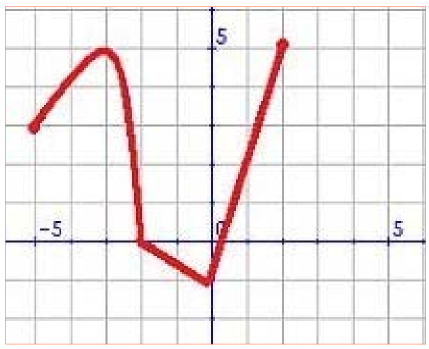
9. Calcula el recorrido de la función:

$$f(x)=\frac{4}{x+5}$$

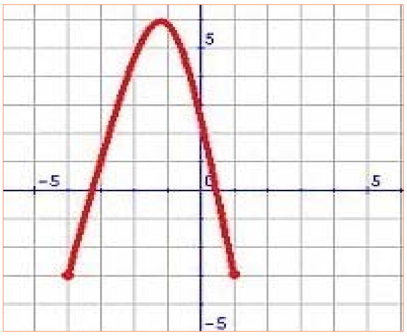
10. Determina de forma gráfica y con intervalos el dominio de la siguiente gráfica:



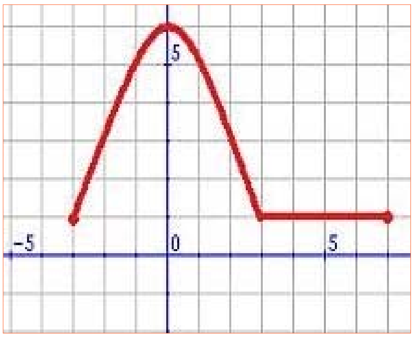
11. Determina de forma gráfica y con intervalos el dominio de la siguiente gráfica:



12. Determina de forma gráfica y con intervalos el recorrido de la siguiente gráfica:



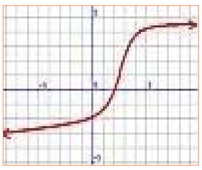
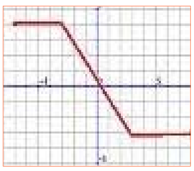
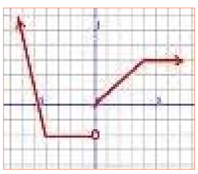
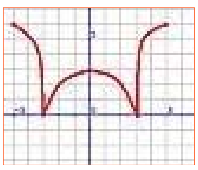
13. Determina de forma gráfica y con intervalos el recorrido de la siguiente gráfica:



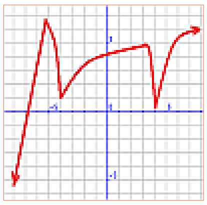
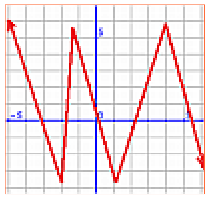
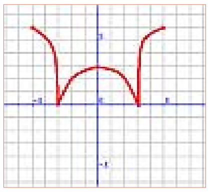
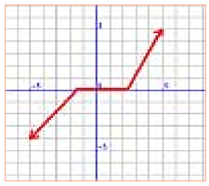
14. Calcula los puntos de corte con los ejes de la función f(x)=x+5

15. Halla los puntos de corte con los ejes de la función f(x)=5 – 3x

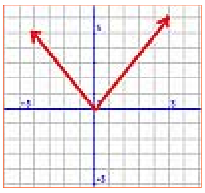
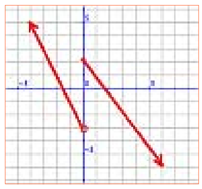
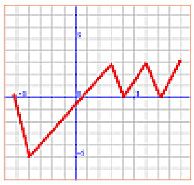
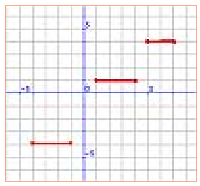
16. Entre las siguientes funciones indica la que se corresponde con una función decreciente en el punto de abscisa x=0.

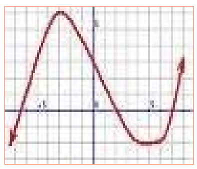
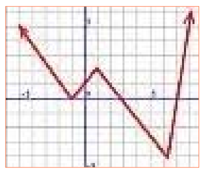
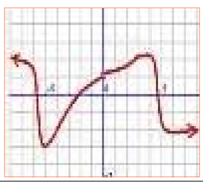
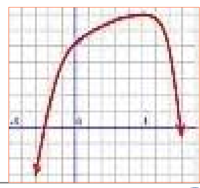
17. Entre las siguientes funciones indica la que se corresponde con una función creciente en el punto de abscisa x=0

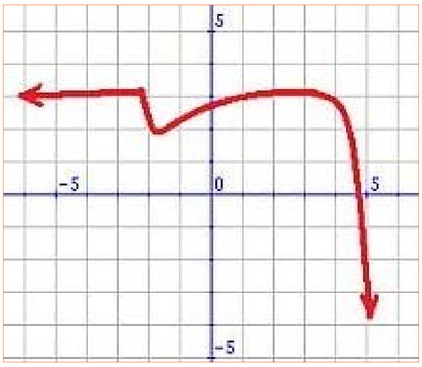
18. Entre las siguientes funciones indica la que se corresponde con una función creciente en el punto de abscisa x=0

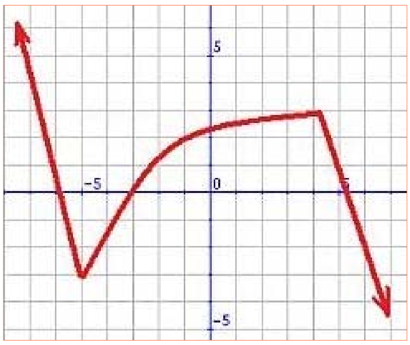
19. Entre las siguientes funciones indica la que se corresponde con una función decreciente en el punto de abscisa x=0.

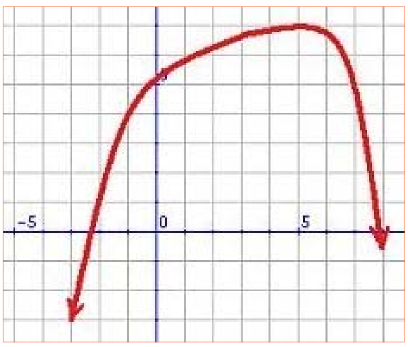
20. En la gráfica siguiente indica las coordenadas donde se alcanza un mínimo.



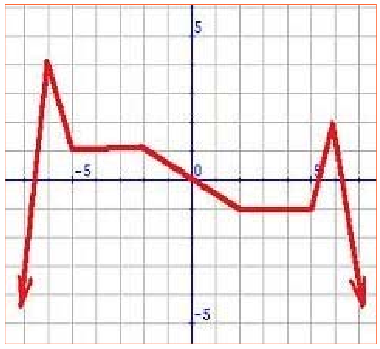
21. En la gráfica siguiente indica las coordenadas donde se alcanza un mínimo.



22. En la gráfica siguiente indica las coordenadas donde se alcanza un máximo.



23. En la gráfica siguiente indica las coordenadas donde se alcanza un máximo.



24. Clasifica la relación entre las magnitudes siguientes:
Calorías y cantidad de pastel, velocidad y espacio en un tiempo fijo, lado de un cuadrado y perímetro, número de entradas y recaudación, aficionados al cine y precio de entrada, gasto en combustible y número de litros, números de personas y parte de tarta, tiempo que está la luz encendida y coste, número de días festivos y horas de sol.

25. Un grifo de caudal fijo llena un depósito en 8 horas. Escribe la función que relaciona el número de grifos y el tiempo. Si en lugar de uno hubiese 5, ¿cuánto tardaría?

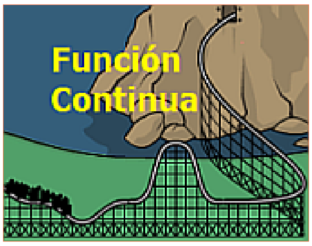
26. Un grifo de caudal fijo llena un depósito en 5 horas. Escribe la función que relaciona el número de grifos y el tiempo. Si en lugar de uno hubiese uno más, ¿cuánto tardaría?

27. Un mapa tiene por escala 1:90000. escribe la función que corresponde con la escala. Calcula la distancia que correspondería con 2 cm en un mapa.

28. Un mapa tiene por escala 1:60000. escribe la función que corresponde con la escala. Calcula la distancia que correspondería con 4´5 cm en un mapa.

Para saber más

Idea sobre continuidad

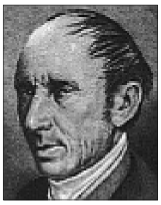


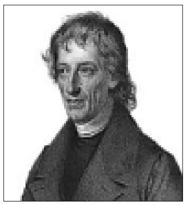
La primera idea que imaginamos sobre continuidad es la de un trazo que dibujamos sin levantar el lápiz del papel.

El transcurrir del tiempo, el desplazamiento de un coche que se dirige hacia un lugar determinado, el crecimiento de las plantas, de los niños, de todos los seres vivientes, las distintas posiciones del sol en el cielo durante el día...multitud de situaciones que se asocian intuitivamente hacia relaciones funcionales donde la continuidad es característica común.

Desde el punto de vista matemático; la continuidad es un concepto "local", es decir que para estudiar la continuidad en un determinado valor hay que observar como se comporta la función en los alrededores de ese mismo valor (entorno de ese punto).

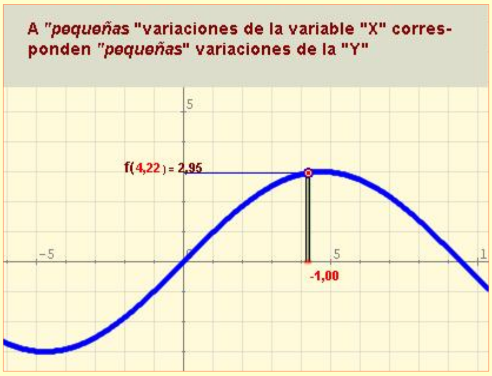
Para que una función sea continua en un punto de su dominio debe comportarse de forma regular en las proximidades del mismo. No deben observarse saltos, en el sentido de que cuando la variable independiente varía muy poco, en la variable dependiente no se observen diferencias significativas. La traducción al lenguaje matemático de esta propiedad no es fácil; para la perfecta definición de continuidad en un punto debe recurrirse a todo un invento matemático; el concepto de límite y a los trabajos, entre otros, de matemáticos como:

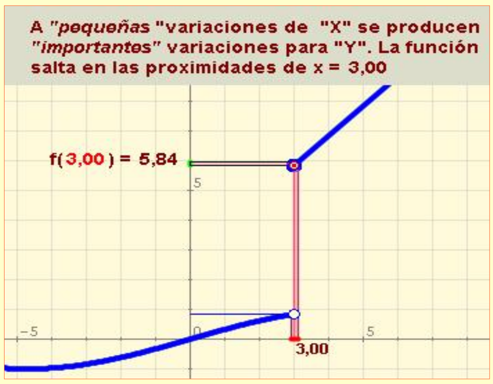




Cauchy Bolzano
Weierstrass

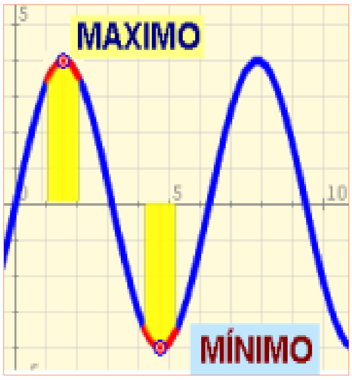
La imagen traduce las consecuencias de lo que ocurre con pequeñas variaciones de la variable independiente en funciones continuas en un punto y funciones discontinuas en un punto.

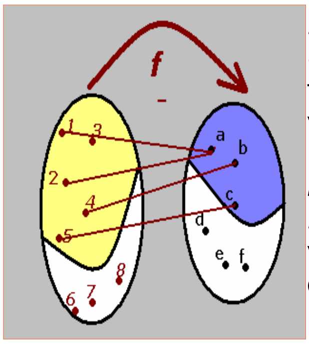




Recuerda lo más importante

Se dice que una correspondencia entre dos conjuntos es una ***función***, cuando **a cada elemento del primer conjunto se le hace corresponder de forma única un elemento del segundo** que llamamos *imagen.*

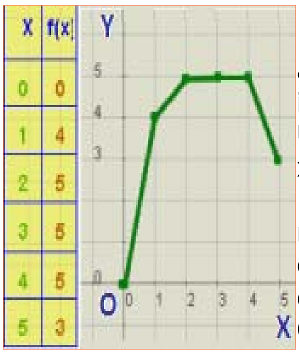




Dominio o campo de existencia es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente.

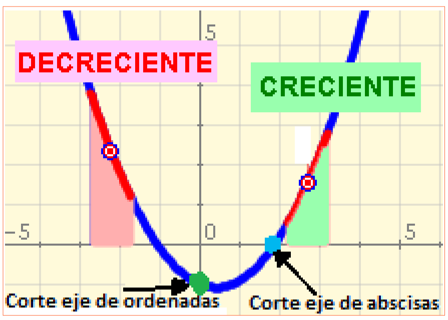
Recorrido, imagen o rango es el conjunto de valores que toma la variable dependiente.

Para representar gráficamente una función, se forma la tabla de valores correspondiente. Cada pareja se identifica con un punto del plano cartesiano.



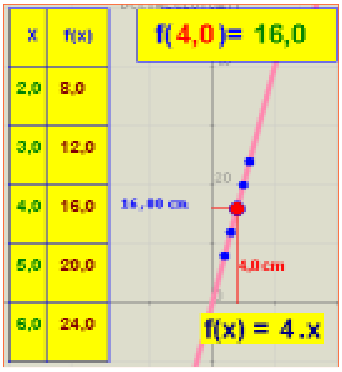
Representamos en el eje de abscisas la variable independiente.
Usualmente se denota como x, y al eje como OX.
La variable dependiente se representa en el eje de ordenadas. Se le suele denotar como y. Y el eje como OY.

Puntos de corte con los ejes, crecimiento



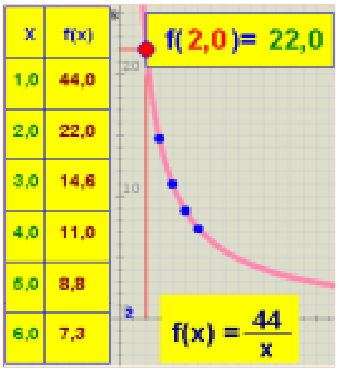
Extremos de una función

Función de proporcionalidad directa



"A más... más y a menos... menos"
La gráfica es una **línea recta** que pasa por el origen de coordenadas.

Función de proporcionalidad inversa



"A más... menos y a menos... más"
La gráfica es una **hipérbola equilátera.**

Autoevaluación

1. Una función asocia a cada valor el resultado de multiplicar por 1 y restar 2. ¿Cuál es la imagen de 0?

2. Una función asocia a cada número su doble menos 8. ¿Cuál es el número cuya imagen es – 8?

3. Una función tiene por fórmula f(x)=7x+2. Indica cuál es el valor f(5)?

4. Una función tiene por fórmula $f(x)=\frac{4}{x}$. Indica cuál es el valor de x en $f(x)=\frac{4}{8}$.

5. Un conductor va a una velocidad uniforme de 70 km/h. Indica la distancia que habrá recorrido al cabo de 5 horas.

6. Por término medio una persona inspira una vez cada 2 segundos. Si por cada inspiración consume 3 litros de aire, calcula el volumen de aire que ha consumido en 14 horas.

7. Si una función tiene por fórmula $f(x)=\frac{x-12}{x-4}$. ¿Qué valor no pertenece a su dominio?

8. Indica el valor en el que la función f(x)=-3x+9 corta al eje de abscisas (OX).

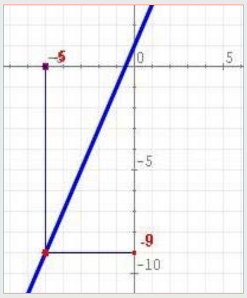
9. Indica el valor en el que la función f(x)=-6x-4 corta al eje de ordenadas (OY).

10. Indica si la función que relaciona: Lado de un pentágono y perímetro, es de proporcionalidad directa, inversa o ninguna de las dos.

Soluciones de los ejercicios para practicar

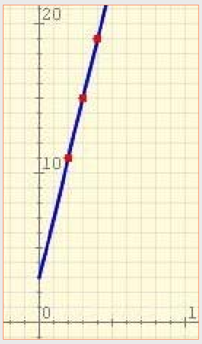
1. f(8)=20, f(9)=22

2. f(-5)=-9

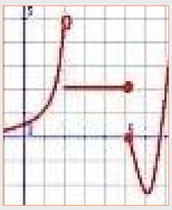


3.

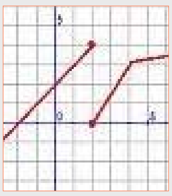
x	f(x)
2	11
3	15
4	19
5	23
7	31



4.



5.



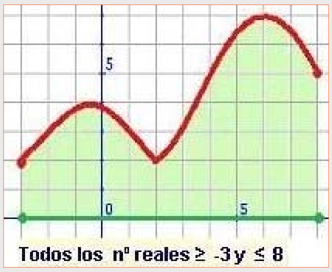
6. R= reales

7. R\{3}

8. R\{0}

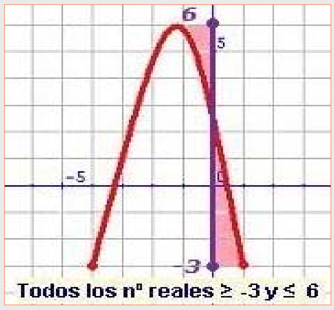
9. R\{0}

10.

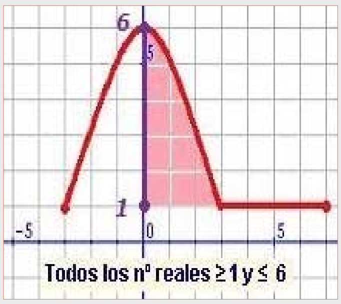


11.

12.



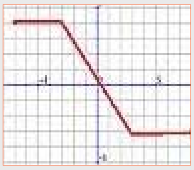
13.



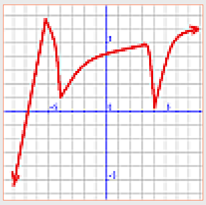
14. $(-5,0)$, $(0,5)$

15. $(\frac{5}{3},0)$, $(0,5)$

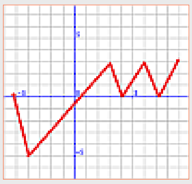
16.



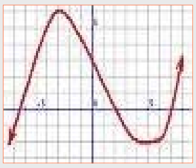
17.



18.



19.



20. (– 1´75,2)
21. (– 5,– 3)
22. (5,7)
23. (– 6,4) y (6,2)
24.

	Directa	Inversa	Ninguna
Calorías y cantidad de pastel	X		
Velocidad y espacio en un tiempo fijo	X		
Lado de un cuadrado y perímetro	X		
Nº de entradas y recaudación	X		
Aficionados al cine y precio			X
Gasto combustible y nº de litros	X		
Nº de personas y parte de tarta		X	
Tiempo de luz encendida y coste	X		
Nº de días festivos y horas de sol			X

25. $f(x) = \dfrac{8}{x}$, 1´6 horas

26. $f(x) = \dfrac{5}{x}$, 2`5 horas

27. f(x)=90000x, 4´95 km

28. f(x)=60000x, 2´7 km

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. – 2
2. 0
3. 37
4. 8
5. 350
6. 75600
7. 4
8. x=3
9. y= – 4
10. Directa

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

12 Estadística.

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Recordar los conceptos de población, muestra, individuo y carácter.
- Valorar la importancia del concepto de variable estadística y distinguir entre los diferentes tipos.
- Resumir mediante una tabla de frecuencias cualquier serie de datos.
- Asociar e interpretar gráficos estadísticos valorando su utilización en diferentes áreas de conocimiento.
- Calcular, valorar e interpretar la media, mediana y moda en variable discreta.

Antes de empezar

La Estadística ha penetrado en múltiples aspectos de la vida cotidiana haciendo familiares términos como población, muestra, media, mediana, moda...

Puede asegurarse que cualquier persona informada de hoy en día posee un vocabulario básico de estadística, lo entiende, lo utiliza y valora.

Prácticamente todas las ciencias, tanto científico tecnológicas como sociales utilizan en aspectos fundamentales de las mismas a la estadística.

El deporte no es una excepción. En todos ellos y en particular en el baloncesto el manejo de los datos estadísticos constituye un aspecto a estudiar y manejar tan importante a veces como las tácticas y la técnica implícitas del propio juego.

En el ejemplo siguiente simula un saque de fondo en baloncesto, se representa con puntos rojos los jugadores atacantes y los verdes como los defensores.
El estudio que realizan los cuerpos técnicos de los equipos se encarga de calcular que estadística de tiro tiene cada jugador, de esta manera si se deja desmarcado al jugador que tenga peor estadística; el balón irá hacia él.

Contenidos

1. Vocabulario estadístico

Población, muestra, individuo y carácter.

Las primeras definiciones necesarias para el inicio de cualquier estudio estadístico son población, individuo, muestra y carácter.

Comencemos con un ejemplo que nos haga intuir dichos conceptos.

Ejemplo

Estudio sobre la posible existencia de vida en otras estrellas.

¿Existen sistemas planetarios semejantes al nuestro que, quizás puedan albergar algún tipo de vida?

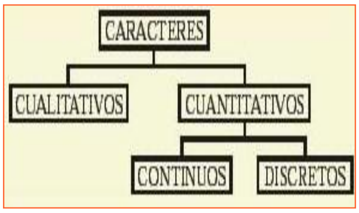
Hasta hace muy poco tiempo, los astrónomos no tenían pruebas de la existencia de planetas fuera del Sistema Solar.
En la actualidad se han descubierto algunos centenares de planetas gigantes, que difícilmente podrían encerrar vida, pero que sí serían una especie de señal de que en esa estrella puede existir un sistema con órbitas y tamaños mas acordes con las posibilidades de vida en el sentido que conocemos.

- La población está constituida por todas las estrellas del universo visible.
- La muestra está constituida por todas las estrellas escogidas y observadas en el proyecto.
- El individuo es cada estrella del universo observable.
- El carácter es la presencia o no de perturbaciones que indiquen la existencia de planetas gigantes.

Podemos definir los conceptos anteriores de la siguiente forma:

- **Población**: Conjunto de todos los elementos que verifican una característica que será objeto de estudio.
- **Individuo**: Cada uno de los elementos de la población.
- **Muestra**: Cualquier subconjunto de la población. Este subconjunto es muy importante que sea *representativo* de la población.
- **Carácter:** Cada una de las propiedades que poseen los individuos de la población y que pueden ser objeto de estudio.

La definición de carácter debe ir acompañada de la siguiente clasificación:



Recordemos entonces que ante cualquier estudio estadístico debemos tener en cuanta la identificación de los elementos, de esta forma evitaremos errores en las conclusiones finales.

Ejemplo

Estudio sobre la evolución de la talla en la juventud española.

Los españoles igualan la estatura a la mayoría de los europeos, pero evolucionan hacia la obesidad norteamericana.

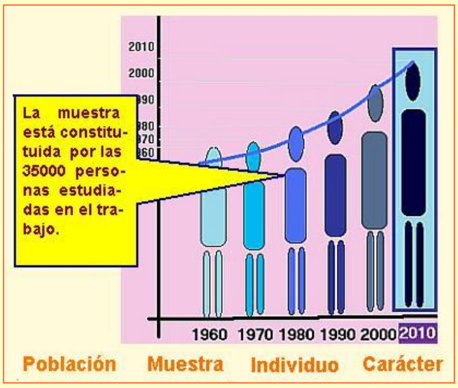
Un estudio antropométrico conjunto entre varios hospitales españoles, revela que la estatura de los españoles se ha igualado en los últimos treinta años respecto a la mayoría de los países europeos.

El mismo estudio también alerta sobre la preocupante tendencia hacia la obesidad en niveles similares a la población norteamericana.

El trabajo, llevado a cabo mediante la medición de casi 35000 sujetos entre los años 2000 y 2004, también demostró que las diferencias entre las distintas comunidades autónomas dentro de España son casi inexistentes.

Población

Muestra



Individuo

Carácter

2. Carácter. Variable estadística.

Trabajo de campo.

El trabajo de campo es la etapa de la investigación en la que se establece contacto directo con la población o muestra para recabar los datos que se necesiten.

La planificación es fundamental y su desarrollo depende del método de obtención de la información que se utilice.
El empleo del ordenador permite una simulación de situaciones que hace que realicemos un trabajo de campo virtual sin desgaste físico.

Carácter cualitativo. Atributos.

Comencemos nuevamente con un ejemplo que nos ilustre.

Ejemplo

Afición al fútbol.

Preguntamos a una serie de personas sobre sus preferencias en cuanto a afición futbolística.

La muestra que consideramos será de 9 personas de distintas ciudades españolas.
Los datos son F.C. Barcelona, Sevilla C.F., At. Bilbao, R. Madrid, R. Madrid, At. Madrid, Valencia C.F., F.C. Barcelona y Deportivo de la Coruña.
Las características de estos valores son:

- No son medibles con números.
- No tiene sentido la ordenación.
- Las distintos valores se identifican con el nombre del equipo elegido.

Todos los individuos de la población que vamos a estudiar tienen una serie de propiedades o cualidades que en estadística reciben el nombre de caracteres.
Los caracteres pueden ser de dos grandes tipos:

a) CUALITATIVOS
b) CUANTITATIVOS

Un carácter cualitativo se caracteriza porque sus diferentes modalidades no pueden expresarse con números.

Ejemplo

Tu color preferido.

Preguntamos a una serie de personas sobre sus preferencias en cuanto a colores.
En este caso la simulación de la población y color elegido se puede realizar mediante el ordenador, existen programas que permiten generar muestras aleatorias que simulan el trabajo de campo.

La muestra sobre la que actuamos será de 10 personas de una ciudad cualquiera.

CARACTERÍSTICAS:

- Los valores que toma no son medibles numéricamente
- No tiene sentido la ordenación
- No tiene sentido hablar de valores CONSECUTIVOS
- Las distintas modalidades del carácter no representables numéricamente, se identifican mediante el nombre del color elegido.

Variables discretas. Carácter cuantitativo discreto.

Se denomina así al carácter cuyas modalidades se pueden representar con números.
Dentro de los caracteres cuantitativos se distinguen dos tipos: Discreto y continuo.
Es discreto si toma valores aislados, de manera que entre dos consecutivos no existe otro intermedio.

Ejemplo

¿Cuánta gente hay en la playa?

Realizamos una fotografía de una determinada zona de playa a distintas horas del día y anotamos las personas que aparecen en ella.

En este caso disponemos de un banco virtual de fotos y un procedimiento totalmente aleatorio que simula las distintas situaciones.

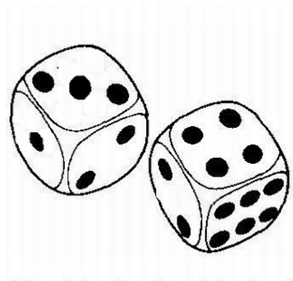
La muestra sobre la que actuamos es de 9 fotografías.

Ejemplo

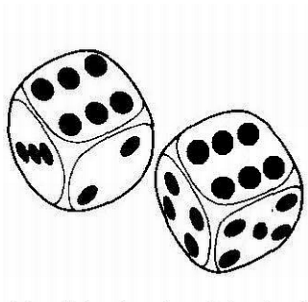
¿Cuánto suman las caras superiores de dos dados previamente lanzados?

Lanzamos dos dados perfectos anotando la suma de los resultados de las caras superiores.

La muestra que consideramos será la suma de 8 pares de lanzamientos.



3 + 4 = 7



6 + 6 = 12

Los datos obtenidos son: 7, 6, 9, 2, 8, 1, 8 y 7.

Las características de estos valores son:

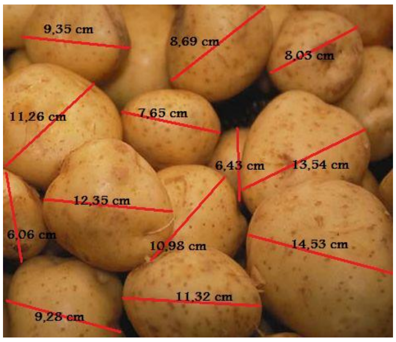
- Los valores que toman son aislados; entre 2 y 12.
- Los valores se pueden ordenar y contar.
- Entre dos valores consecutivos no existen valores intermedios.

Variables continuas. Carácter cuantitativo continuo.

Cuando las modalidades de un carácter cuantitativo pueden tomar valores de un conjunto de números reales o un intervalo, al menos teóricamente, se dice que estamos ante un carácter cuantitativo.

Ejemplo

Midiendo patatas. Diámetro medio.



Para una posterior clasificación de calidad se realiza un estudio sobre el diámetro medio en distintas producciones de patatas. La muestra que consideramos será de 8 producciones.

Todo el, en este caso, costoso procedimiento de recogida de las muestras lo sustituimos por una simulación por ordenador.

Los datos obtenidos son: 14,6 ; 6,7 ; 9,8 ; 13,2 ; 8,1 ; 9,3; 13,8 y 10,1.

Las características que se tienen sobre los valores son:

- Entre dos valores siempre existe la posibilidad de otro.
- No tiene sentido hablar de valores consecutivos.
- Toma valores dentro de un intervalo.

Ejemplo

Pesando recién nacidos.

Vamos a preguntar el peso de los recién nacidos en una determinada ciudad.
Existen programas informáticos que permiten generar muestras aleatorias que simulan el trabajo de campo.

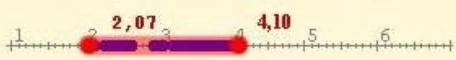
La muestra sobre la que actuamos es de 40 bebes.

DATOS OBTENIDOS

2,28	3,22	3,95	2,43	3,59
2,47	3,41	3,50	2,07	2,13
3,55	2,61	3,21	2,29	4,07
2,33	2,51	3,38	3,67	4,10
3,84	2,31	2,63	4,03	2,95
3,86	4,03	3,02	2,99	4,00
3,72	2,98	3,88	3,07	3,28
3,84	3,37	3,55	4,07	2,94

CARACTERÍSTICAS:

- Entre dos valores siempre existe la posibilidad de otro
- No tiene sentido hablar de valores CONSECUTIVOS
- Toma valores dentro del intervalo [2,07 ,4,10]
- INTERVALO DE VALORES



Ejercicios resueltos

1. Clasifica las siguientes variables: cualitativas, discreta o continua, escribiendo una X en el recuadro correspondiente.

Nº de hijos varones, tipo de música preferida, nº de hijos, peso de recién nacidos, páginas de un libro, estatura.

SOLUCIÓN:

	CUALITATIVA	DISCRETA	CONTINUA
Nº de hijos varones		X	
Tipo de música preferida	X		
Nº de hijos		X	
Peso de recién nacidos			X
Páginas de un libro		X	
Estatura			X

2. Clasifica las siguientes variables: cualitativas, discreta o continua, escribiendo una X en el recuadro correspondiente.

Raza de perros. nº de hijos, longitud del pie, asignaturas pendientes, perímetro craneal, cantante favorito.

SOLUCIÓN:

	CUALITATIVA	DISCRETA	CONTINUA
Raza de perros	X		
Nº de hijos		X	
Longitud del pie			X
Asignaturas pendientes	X		
Perímetro craneal			X
Cantante favorito	X		

Observa:

La variable "asignaturas pendientes" hace referencia al nombre de las asignatura y por eso es variable cualitativa, mientras la variable "nº de asignaturas pendientes" sería discreta.

3. Ordenación de datos.

Al final podrás comprobar que...

PROPIEDADES INTERESANTES DE LAS TABLAS ESTADÍSTICAS

- La suma de todas las frecuencias absolutas es igual al tamaño de la población o de la muestra.
- La suma de las frecuencias relativas es siempre igual a 1.

Si se ha realizado algún redondeo en las frecuencias relativas es usual que la suma de las mismas no sea exactamente igual a uno debido a los errores cometidos..

Tabulación para variable discreta.

El paso siguiente al trabajo de campo es la disposición de los datos de manera ordenada, concisa y visualmente atractiva. En estadística, este proceso recibe el nombre de tabulación.

Los valores obtenidos se ordenan, especifican y agrupan de tal forma que sea fácil la información y búsqueda.

Las primeras columnas que deben aparecer serán:

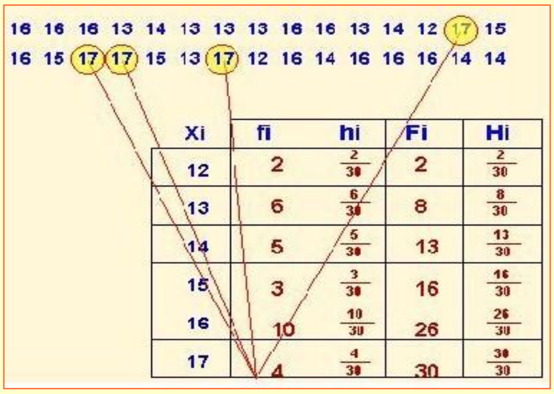
- Valores de la variable, X_i .
- Frecuencias absolutas, f_i .
- Frecuencias relativas, h_i .
- Frecuencias absolutas, acumuladas, F_i .
- Frecuencias relativas acumuladas, H_i .

En algunos casos se puede utilizar el porcentaje en lugar de las frecuencias relativas o además de las frecuencias relativas.

Ejemplo

Edad de los estudiantes.

Las edades de 30 estudiantes de un instituto de enseñanza secundaria da los valores que posteriormente tabulamos como sigue:



16 16 16 13 14 13 13 13 16 16 13 14 12 17 15
16 15 17 17 15 13 17 12 16 14 16 16 16 14 14

Xi	fi	hi	Fi	Hi
12	2	$\frac{2}{30}$	2	$\frac{2}{30}$
13	6	$\frac{6}{30}$	8	$\frac{8}{30}$
14	5	$\frac{5}{30}$	13	$\frac{13}{30}$
15	3	$\frac{3}{30}$	16	$\frac{16}{30}$
16	10	$\frac{10}{30}$	26	$\frac{26}{30}$
17	4	$\frac{4}{30}$	30	$\frac{30}{30}$

Tabulación para variable cualitativa.

En los casos de carácter cualitativo, la tabulación de los datos es muy simple. Las tres columnas que tienen sentido hacen referencia a:

- El valor de los atributos.
- La frecuencia absoluta
- La frecuencia relativa

Ejemplo

La práctica de deporte.

Recogida de datos sobre deportes practicados, tabulada:

fútbol, tenis, balonmano, tenis, voleibol, atletismo, baloncesto, fútbol, fútbol, balonmano, fútbol, voleibol, balonmano, fútbol, balonmano, fútbol, fútbol,tenis, atletismo.

X= deporte	f	h
baloncesto	2	2/20
balonmano	4	4/20
voleibol	2	2/20
tenis	3	3/20
atletismo	2	2/20
futból	7	7/20
	20	

Ejercicios resueltos

3. Para un estudio de accesibilidad, durante 30 días anotamos el número de plazas libres de aparcamiento a las 5 de la tarde.

1	2	1	2	0	1	3	2	1	5	0	2	2	1	3
3	2	1	1	5	0	5	3	0	3	3	2	2	3	1

Realiza una tabulación de los datos en la que aparezcan las columnas correspondientes a las frecuencias absolutas, relativas, acumuladas absolutas y relativas.

SOLUCIÓN:

Nº de plazas de aparcamiento	f	h	F	H
0	4	0,14	4	0,14
1	8	0,28	12	0,41
2	8	0,28	20	0,69
3	7	0,24	27	0,93
4	0	0	27	0,93
5	3	0,1	30	1,03
	30			

4. Preguntamos a 20 estudiantes elegidos aleatoriamente por el tipo de música que prefieren escuchar.

Los resultados son: disco, rock, rock, clásica, rock, latina, pop, rock, latina, rock, flamenco, flamenco, flamenco, latina, rock, clásica, disco, disco, latina, rock.

Realiza una tabulación de los datos en la que aparezcan las columnas correspondientes a las frecuencias absolutas y relativas.

SOLUCIÓN:

Tipo de música	f	h
Disco	3	0,1
Rock	7	0,24
Latina	4	0,14
Clásica	2	0,07
Flamenco	3	0,1
Pop	1	0,03
	20	

4. Gráficos para una variable cualitativa.

Diagrama de barras.

El diagrama de barras es junto al de sectores el gráfico más utilizado para variable cualitativa.
Se utiliza como complemento a la tabla de frecuencias o incluso en sustitución de ésta.

En el eje de abscisas se sitúan a igual distancia los distintos atributos.

A partir de cada atributo se levantan barras de igual grosor y cuya altura sea la de la correspondiente frecuencia absoluta.

Diagrama de sectores.

El diagrama de sectores en variables cualitativas es uno de los recursos estadísticos más utilizados.
Es Especialmente útil en los casos en que existen pocas modalidades del carácter. Se suele utilizar junto a la tabla de frecuencias o sustituyendo a ésta.

Para calcular el ángulo del sector que corresponde a cada valor de la frecuencia:

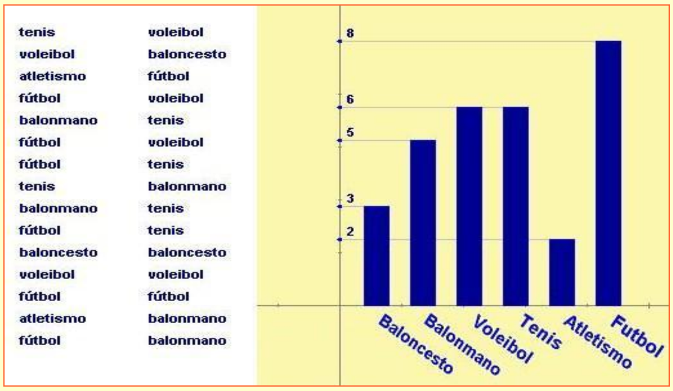
$$\boxed{\text{Total datos}} \longrightarrow \boxed{360^\circ}$$
$$\boxed{f_i} \longrightarrow \boxed{x}$$
$$x = \frac{f_i \cdot 360}{Total\ Datos}$$

Ejemplos

Deporte practicados.(Diagrama de barras)

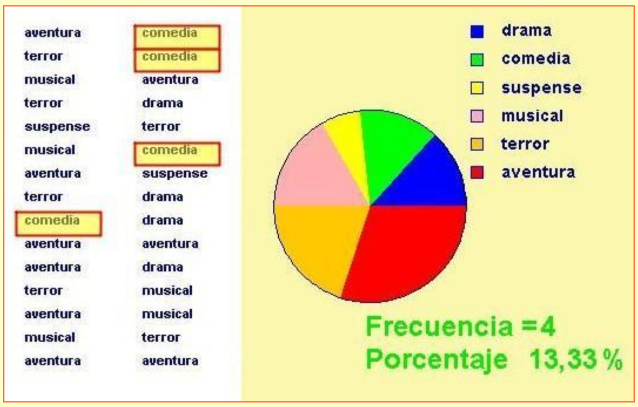
Los datos corresponden a las contestaciones realizadas por 30 estudiantes sobre el deporte que practicaban con mayor frecuencia en el instituto.

Si queremos tener una rápida visión de los datos, una forma de organizarlos es a través de una representación de diagrama de barras. En este ejemplo puedes ver la diferencia entre hacer un análisis sobre el listado o sobre la gráfica. ¿Cuál te resulta más fácil?.



Tipo de película. (Diagrama de sectores)

Hemos vuelto a preguntar a nuestros estudiantes sobre el tipo de película que les gusta ver. Otra forma de organizarlos de forma más fácil de ver es el diagrama de sectores. ¿Serías capaz de recordar alguna otro ejemplo? (Ayuda: ocurre cada cuatro años).



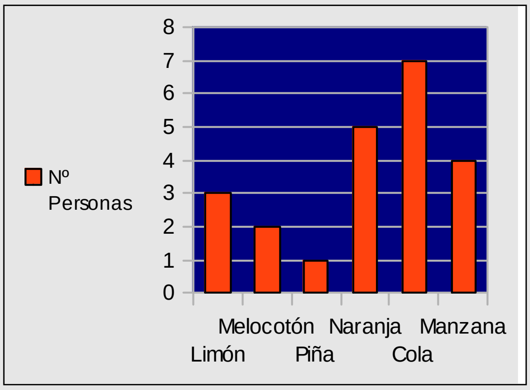
Ejercicios resueltos

5. Los datos corresponden a las contestaciones realizadas por 22 personas elegidas aleatoriamente, acerca del sabor preferido en los refrescos de una determinada marca.

Naranja, manzana, cola, naranja, limón, cola, melocotón, cola, limón, cola, cola, manzana, limón, naranja, cola, piña, manzana, naranja, cola, naranja, manzana y melocotón.

Dibuja el diagrama de barras que representa los datos anteriores.

SOLUCIÓN:

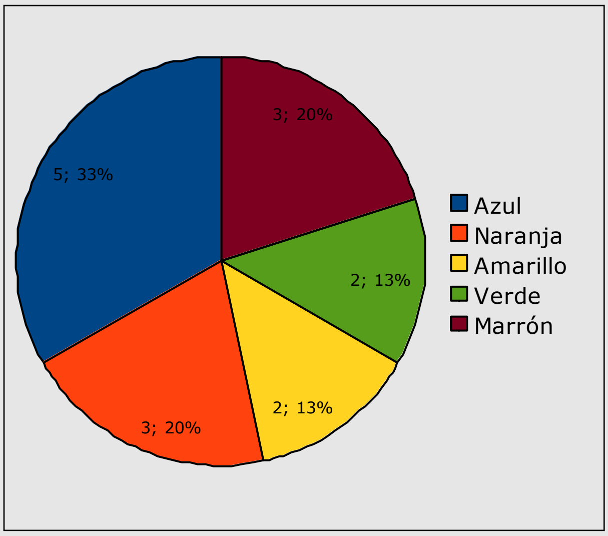


6. Los resultados corresponde a las contestaciones realizadas por 15 estudiantes acerca de cuál es su color preferido.

Las respuestas que dieron son: azul, marrón, naranja, amarillo, azul, naranja, verde, verde, azul, marrón, azul, naranja, amarillo, marrón, y azul.

Dibuja el diagrama de sectores que representa los datos anteriores.

SOLUCIÓN:



5. Gráficos para una variable discreta.

Diagrama de barras.

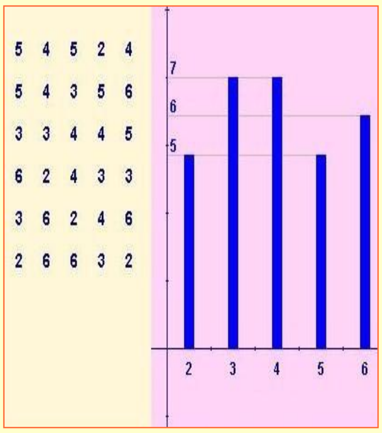
Es el gráfico estadístico más utilizado para variables discretas. Para elaborar el diagrama, se sitúan en el eje de abscisas los valores correspondientes de la variable.
A partir de cada valor se levantan barras del mismo grosor y cuya altura será la correspondiente a cada frecuencia.

Ejemplo

Faltas de ortografía.

La profesora ha anotado el número de faltas de ortografía de sus estudiantes.

Quiere una representación que le permita ver los datos rápidamente, sabiendo cuántos estudiantes comenten un número determinado de faltas de ortografía.



Polígonos de frecuencias.

El polígono de frecuencias se construye a partir del diagrama de barras, uniendo los puntos medios de la base superior de los rectángulos que constituyen las barras.

Si se construye un diagrama de barras considerando en lugar de las frecuencias las frecuencias acumuladas y unimos los puntos medios de las bases superiores mediante segmentos, obtenemos una poligonal creciente que denominamos *polígono de frecuencias acumuladas.*

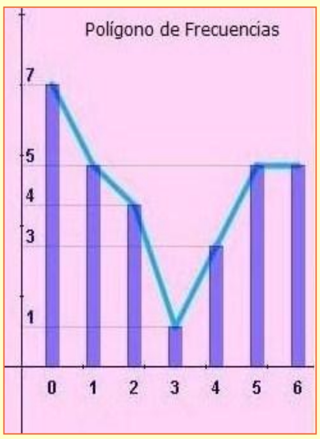
Ejemplo

Número de llamadas.

Una empresa de telecomunicaciones quiere hacer un estudio sobre sus clientes, viendo el número de llamadas que recibe un grupo de estos.

El estudio se realiza sobre 30 personas, anotando el número de llamadas recibidas en un día.

Xi	fi	Fi
0	7	7
1	5	12
2	4	16
3	1	17
4	3	20
5	5	25
6	5	30



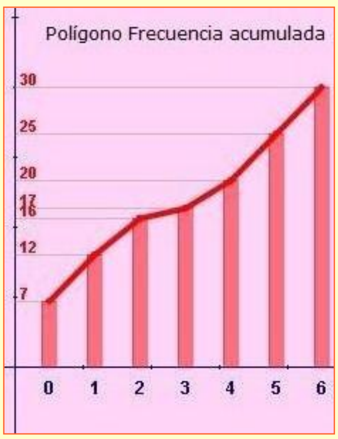


Diagrama de sectores.

Como complemento a la tabulación y a veces sustituyendo a ésta, en Estadística es muy habitual recurrir a gráficos cuyo efecto visual directo capta las primeras características de una distribución estadística.

Para variables cuantitativas discretas, así como para las cualitativas, los gráficos que se utilizan con mas frecuencia son:

1. El diagrama de barras
2. El diagrama de sectores

Sin embargo, depende del tipo de información que queramos obtener, a veces, resulta útil realizar el polígono de frecuencias, y el polígono de frecuencia acumuladas.

Veamos primero un ejemplo.

Ejemplo

Número de suspensos.

Durante el mes de Marzo, los tutores y tutoras han hecho un estudio sobre el número de faltas de sus tutorandos. Tomando una clase con 30 estudiantes, los resultados son los siguientes:

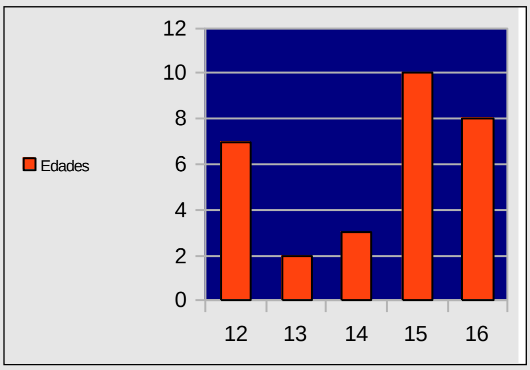
Ejercicio resuelto

7. Las edades de 30 estudiantes de un instituto de enseñanza secundaria son las siguientes:

15	15	16	15	16	16	16	16	16	12	13	12	15	16	14
12	14	12	15	13	14	16	15	15	12	15	12	15	15	12

Representa el diagrama de barras correspondiente:

SOLUCIÓN:



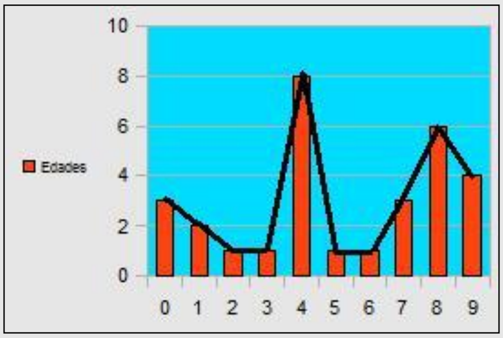
Ejercicios resueltos

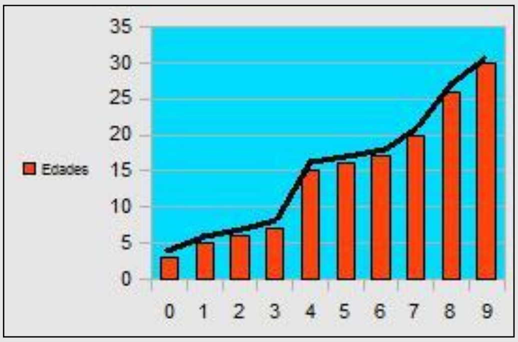
8. Los datos corresponden al número de llamadas telefónicas que reciben al día 30 personas.

0	8	8	8	3	9	0	4	4	7	9	7	2	7	4
4	9	1	4	1	4	5	6	4	9	8	1	8	4	8

Dibuja el diagrama los polígonos de frecuencia y de frecuencia acumuladas que representa los datos anteriores.

SOLUCIÓN:



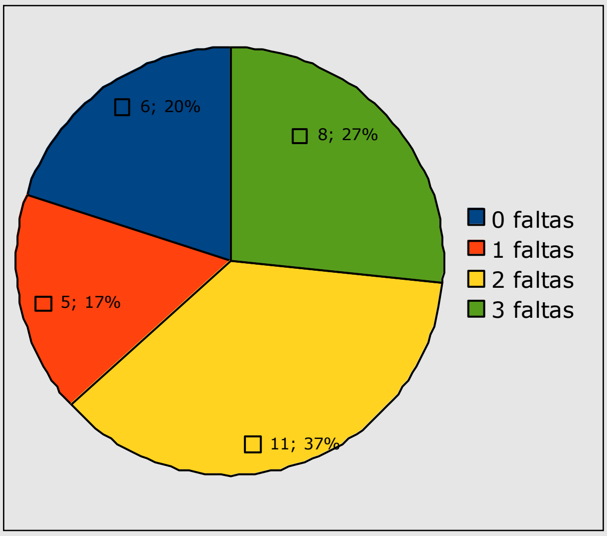


9. Los datos corresponden al número de faltas de ortografía en el mismo texto de 30 estudiantes.

2	2	2	1	1	2	3	2	0	0	3	2	1	0	3
3	3	2	3	0	0	1	2	2	1	3	0	3	2	2

Representa el diagrama de sectores correspondiente.

SOLUCIÓN:



6. Medidas de centralización

Media aritmética.

A los parámetros o medidas estadísticas que informan sobre la tendencia habitual o central de los datos de una distribución se les denomina en estadística *medidas de tendencia central.* La más utilizada es la media aritmética.

La media aritmética se define como la suma de todos los datos dividida entre el número total de estos. Como habitualmente dispondremos de una tabla de datos con sus frecuencias, aplicaremos:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_n \cdot f_n}{N}$$

1. La media no tiene porqué ser un valor propio de la variable.
2. Es muy sensible a valores extremos en los datos.
3. Se comporta de forma natural en relación a las operaciones aritméticas.

Ejemplo

Faltas de asistencias. (Muchos datos)

Cuando tenemos muchos datos, para evitar realizar una cuenta con gran cantidad de números, primero organizamos una tabla.
Veamos el ejemplo en que se tienen anotados las faltas de asistencia de un grupo de 27 estudiantes.
Hay 6 estudiantes que han faltado 0 veces, 4 que faltaron 1 vez,...

Xi	fi	xi.fi
0	6	0
1	4	4
2	4	8
3	0	0
4	6	24
5	3	15
6	4	24
	27	75

Después de tabular los datos, construimos la columna correspondiente a los productos xi.fi

En la última casilla, calculamos la suma total de la columna $\sum_{i=1}^{n} xi.fi$

La media se obtiene dividiendo $\sum_{i=1}^{n} xi.fi = 75$ entre el total de datos 27,

$$\text{media} = \frac{75}{27} = 2{,}77$$

Ejemplo

Faltas de asistencias. (Pocos datos)

Las faltas de asistencia de 4 estudiantes en un mes vienen recogida por los siguientes valores: 0, 3, 2 y 1.
La media aritmética se calcula:

$$\frac{0+3+2+1}{4} = 1{,}5$$

Mediana.

La mediana es aquel valor de la variable estadística que deja el 50% de observaciones inferiores a él; así pues, la mediana divide en dos partes iguales a la distribución estadística.

Dentro de las propiedades de la mediana se pueden destacar:

1. Como medida descriptiva no se ve tan afectada como la media por la presencia de valores extremos.
2. Es de cálculo rápido y de fácil interpretación.
3. Tiene propiedades matemáticas complicadas que hacen que se utilice poco en inferencia estadística.

Caso de pocos datos y en número impar.

En este caso se procede a ordenar los datos de menor a mayor, se considera el valor de la mediana el que corresponde al lugar central.

Caso de pocos datos y en número par.

En este caso se procede a ordenar los datos de menor a mayor, se considera el valor de la mediana el correspondiente a la semisuma de los dos lugares centrales.

Ejemplo

La mediana del número de suspensos. (Muchos datos)

Entramos en una clase de 25 estudiantes y preguntamos el número de suspensos en la última evaluación, hay 4 estudiantes con 0 suspensos, 2 con 1 suspensos,...

Como tenemos muchos datos, los organizamos en la siguiente tabla para calcular la mediana.

Para localizar la mediana, en primer lugar calculamos la mitad de los datos:

$$\frac{N}{2} = 12{,}5$$

Ahora buscamos en la columna de frecuencias acumuladas la primera vez que se supera a la mitad de los datos.

El valor correspondiente de Xi es la mediana de la distribución estadística. En este caso:

Me= 3

Xi	fi	Fi
0	4	4
1	2	6
2	3	9
3	7	16
4	4	20
5	5	25
	25	25

Moda

Se define la moda como el valor de la variable estadística que tiene la frecuencia absoluta más alta.

Si existen varios valores con esta característica, entonces se dice que la distribución tiene varias modas (*plurimodal*).

Esta medida de centralización es sin duda la de más fácil cálculo. Se suele utilizar como complemento a la media aritmética y mediana ya que por sí sola no aporta una información determinante de la distribución.

No es tan sensible como la media aritmética a valores extremos.

Ejemplo

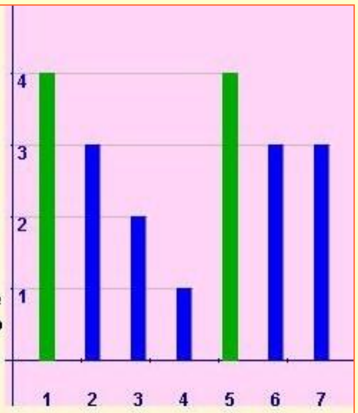
Número de llamadas.

En un grupo de 20 personas se recogen el número de llamadas que realizan durante un día.

Resultando los siguientes valores: 4 personas hacen 1 llamada, 3 personas hacen 2 llamadas, 2 personas hacen 3 llamadas...

Xi	fi	Fi
1	4	4
2	3	7
3	2	9
4	1	10
5	4	14
6	3	17
7	3	20

La moda es el valor de mayor frecuencia absoluta.



Observa que en este ejemplo tenemos que la distribución es bimodal, ya que $X_1 = 1$ y $X_5 = 5$ corresponden con $f_1 = 4 = f_5$. Siendo ambas el máximo número de llamadas.

Compara dicho dato con lo ya aprendido de la media aritmética y la mediana.

Ejercicios resueltos

10. Las edades de un grupo de 9 amigas son: 12, 14, 13, 16, 13, 15, 15, 17 y 13. Calcula la media, mediana y moda.

SOLUCIÓN:

X = Edad	f	F	X·f
12	1	1	12
13	3	4	39
14	1	5	14
15	2	7	30
16	1	8	16
17	1	9	17
			128

Media: $\frac{128}{9} = \ = 14{,}22$

Mediana 14 (si ordenamos los datos, aparece en la posición 5).

Moda: 13 (aparece 3 veces).

11. El número de llamadas telefónicas que reciben al día los 9 integrantes de una familia son:

7, 8, 15, 12, 13, 5, 10, 4, 8

Calcula la media, mediana y moda.

SOLUCIÓN:

X = Nº de llamadas	f	F	X·f
4	1	1	4
5	1	2	5
7	1	3	7
8	2	5	16
10	1	6	10
12	1	7	12
13	1	8	13
15	1	9	15
			73

Media: $\frac{73}{9} = \ = 8{,}11$

Mediana 8 (si ordenamos los datos, aparece en la posición 5).

Moda: 8 (aparece 2 veces).

Para practicar

A. Clasifica según el carácter de la variable las siguientes situaciones:

1. Situaciones:

Cantante favorito
Longitud de espárragos
Marca de refresco favorita
Tipo de música preferida
Raza de perros
Nº días soleados al mes

2. Situaciones:

Nº días de vacaciones
Autor literario favorito
Nº hermanos
Nota media en selectividad
Temperatura media ciudad
Nº días falta a clase

3. Situaciones:

Nº días lluviosos al mes
Tiempo de espera autobús
Nº faltas en un dictado
Color de ojos
Películas vista al mes
Nota media en selectividad

B. Realiza una tabulación que incluya la frecuencia absoluta, relativa y sus acumuladas, cuando sea necesario aproxima hasta las centésimas, de los datos que se corresponden con las situaciones siguientes:

4. El número de veces que han cambiado de domicilio 23 personas.
2, 2, 0, 2, 4, 2, 4, 4, 3, 4, 3, 3, 3, 3, 0, 1, 0, 4, 0, 3, 0, 3 y 5.

5. El número de hermanos que tienen 20 estudiantes de un centro.
1, 4, 0, 2, 3, 1, 0, 3, 4, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 1, 1, 2, 1 y 1.

6. El número de dormitorios de 28 viviendas de una ciudad.
3, 5, 0, 4, 2, 3, 0, 0, 1, 1, 3, 0, 2, 4, 1, 3, 3, 3, 1, 4, 4, 0, 3, 3, 1, 4, 3 y 1.

7. El número de faltas de ortografía en el mismo texto de 30 estudiantes son:
0, 0, 2, 1, 4, 6, 6, 5, 0, 4, 6, 5, 5, 1, 0, 0, 3, 5, 1, 2, 5, 1, 0, 5, 2, 0, 4, 3, 6 y 4.

C. Efectúa una tabulación de los datos en la que aparezcan las columnas de frecuencias absolutas y relativas. Cuando sea necesario aproxima hasta las centésimas.

8. El sabor preferido en los refrescos de una determinada marca de 22 personas.
Naranja, cola, naranja, limón, cola, melocotón, cola, limón, cola, cola, manzana, limón, naranja, cola, piña, cola, naranja, manzana, naranja, cola, naranja y manzana.

9. Las actividades realizadas en por 20 estudiantes en sus tiempos libres.
Deporte, amigos, idiomas, música, idiomas, idiomas, amigos, música, deportes, baile, baile, música, deportes, idiomas, cine, amigos, deportes, amigos, música, y cine.

10. El tipo de programa de televisión que prefieren ver en su tiempo libre. Ficción, infantiles, deportivos, espectáculo, documentales, infantiles, ficción, culturales, espectáculo, infantiles, ficción, deportivos, deportivos, espectáculo, ficción, documentales, culturales, ficción, deportivos y espectáculo.

D. Dibuja el diagrama de barras correspondiente a las situaciones que aparecen.

11. Preguntamos a 25 estudiantes elegidos aleatoriamente por el tipo de música que prefieren escuchar. Los resultados son: disco, disco, rock, clásica, rock, latina, pop, rock, pop, latina, rock, flamenco, flamenco, latina, flamenco, latina, rock, clásica, disco, disco, latina, rock, disco, latina y rock.

12. Los datos corresponden a las contestaciones realizadas por 25 personas elegidas aleatoriamente, acerca del tipo de película que prefieren ver. Los datos son los siguientes: comedia, terror, suspense, comedia, aventura, drama, aventura, aventura, comedia, musical, terror, musical, suspense, aventura, comedia, terror, musical, terror, terror, comedia, suspense, suspense, comedia, aventura y aventura.

13. Los resultados siguientes corresponden a las contestaciones realizadas por 25 estudiantes acerca de las actividades realizadas en sus tiempo libre. Deporte, amigos, amigos, idiomas, música, idiomas, deporte, música, idiomas, amigos, música, deportes, baile, música, baile, música, deportes, idiomas, cine, amigos, deportes, cine, amigos, música, y cine.

14. Las edades de 30 estudiantes de un instituto de enseñanza secundaria son las siguientes: 12, 13, 12, 15, 12, 15, 13, 14, 15, 12, 12, 12, 15, 15, 13, 14, 14, 16, 13, 12, 13, 14, 15, 16, 15, 13, 14, 15, 15 y 12.

15. Número de asignaturas suspensas de 30 estudiantes son: 2, 0, 3, 2, 4, 0, 1, 3, 4, 2, 5, 0, 3, 2, 5, 4, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 3, 4, 2, 0, 5, 5, 3 y 2.

16. El número de llamadas telefónicas que reciben un día un grupo de 20 amigos son: 4, 5, 1, 9, 5, 3, 6, 3, 7, 8, 3, 4, 1, 0, 9, 7, 6, 2, 1 y 5.

17. Para un estudio de accesibilidad, durante 30 días anotamos el número de plazas libres de aparcamiento a las 5 de la tarde. 1, 1, 3, 5, 4, 0, 1, 3, 4, 2, 5, 0, 3, 2, 5, 4, 3, 1, 0, 1, 4, 1, 3, 4, 2, 3, 5, 4, 3 y 0.

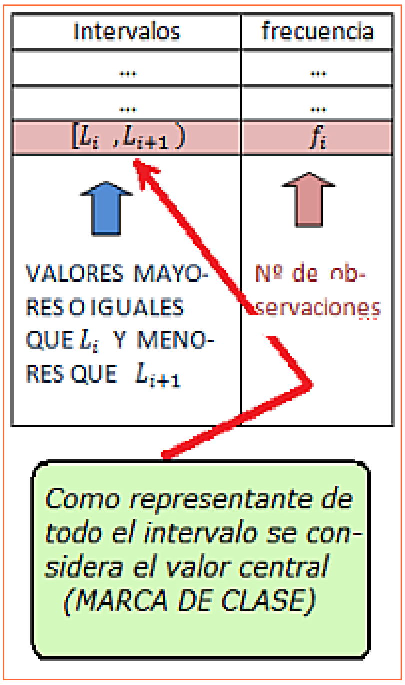
E. Dibuja el diagrama de sectores correspondiente a las situaciones que aparecen en los ejercicios D.11, D.12, D.16 y D.17

F. Realiza el polígono de frecuencia y el de frecuencia acumulada de los ejercicios del apartado D.14 y D.15

G. Halla las medidas de centralización de los ejercicios del apartado B.6 y B.7

Para saber más

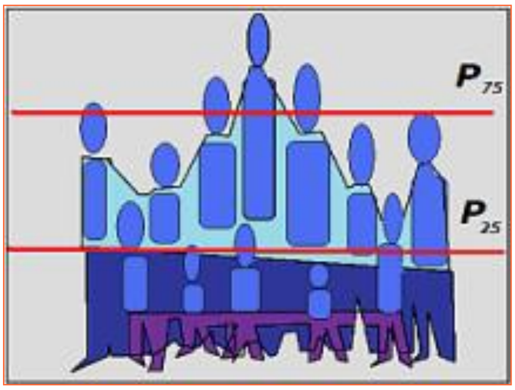
En estadística en muchas ocasiones una variable discreta toma tal variedad de valores que para que la tabulación sea efectiva, debe realizarse mediante intervalos. La variable queda de esta manera dividida en clases (intervalos, generalmente de la misma amplitud). Esta es la técnica que se utiliza para variables continuas.



La *mediana* es la medida de posición que más se utiliza, sin embargo es muy habitual en la mayoría de los estudios estadísticos hacer referencia a otras medidas de posición como los cuartiles, deciles o percentiles.

Además de las medidas de centralización y posición, en estadística se cuenta con otros parámetros que miden el grado de dispersión de los datos, es decir; como se alejan de la media. Para medir este grado de dispersión se utilizan normalmente:

- Rango
- Varianza
- Desviación típica

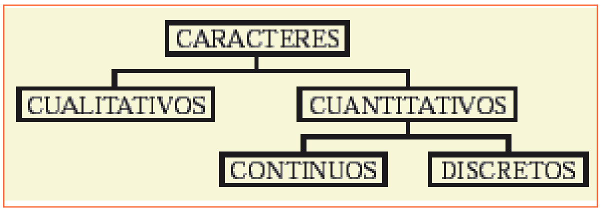


El principal parámetro estadístico y el más utilizado es la *media aritmética*, sin embargo una característica importante de la media es que se ve muy afectada por valores extremos en la distribución.

La variación de un simple dato en la distribución afecta a las medidas de tendencia central aunque no de la misma forma. En estadística a un valor especialmente anómalo se le denomina Outlier. Decidir si en un estudio estadístico se depuran estos valores extremos, es una de las primeras acciones que debe realizar un investigador.

Recuerda lo más importante

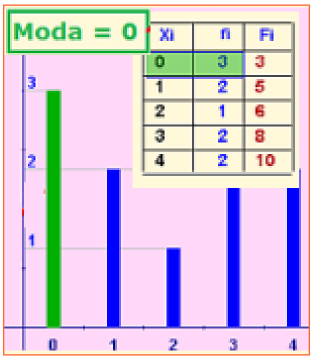
Las primeras definiciones necesarias para el inicio de cualquier estudio estadístico son: ***Población, Individuo, Muestra*** *y* ***Carácter***.



CUALITATIVOS: *No expresables numéricamente*.
CUANTITATIVOS: *Se puede expresar mediante número*.

Medidas de tendencia central

Moda: Valor que tiene la frecuencia absoluta más alta.

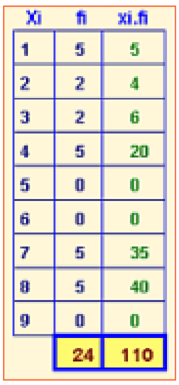


Xi	fi	Fi
0	3	3
1	2	5
2	1	6
3	2	8
4	2	10

Es la única que puede calcularse para variable cualitativa.

No es tan sensible como la media aritmética a valores extremos.

Media aritmética: suma de todos los datos dividida entre el número total de estos.

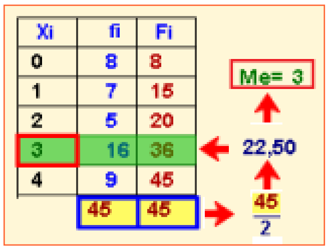


Xi	fi	xi.fi
1	5	5
2	2	4
3	2	6
4	5	20
5	0	0
6	0	0
7	5	35
8	5	40
9	0	0
	24	110

Muy sensible a valores extremos en los datos
No tiene por qué ser un valor propio de la variable

$$\text{media} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi.fi}{\sum_{i=1}^{n} fi} = \frac{110}{24} = 4{,}58$$

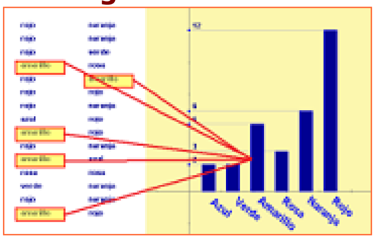
Mediana: divide en dos partes iguales a la distribución estadística.



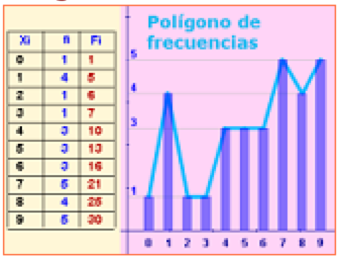
Xi	fi	Fi
0	8	8
1	7	15
2	5	20
3	16	36
4	9	45
	45	45

De cálculo rápido y de fácil interpretación. No es tan sensible como la media aritmética a valores extremos.

Diagrama de barras



Polígono de frecuencias



Xi	fi	Fi
0	1	1
1	4	5
2	1	6
3	1	7
4	3	10
5	3	13
6	3	16
7	5	21
8	4	25
9	5	30

Diagrama de sectores

Autoevaluación

1. Dados los datos: 7, 5, 7, 5, 6, y 8.
Calcula la media aritmética con dos cifras decimales.

2. La nota media obtenida en cinco exámenes ha sido 6,8. Si cuatro de las notas han sido 4,7; 9,5; 8,3 y 9,2. ¿Cuál es la quinta?

3. La nota media de cuatro notas es 4,2. Si he sacado ahora un 8,0. ¿Qué nota media tendré ahora?

4. En una prueba de gimnasia la puntuación de cada atleta se calcula eliminado la peor y la mejor nota de los jueces. Si las puntuaciones obtenidas han sido: 8,1; 9,0; 9,3; 9,6; 8,2; 8,7 y 9,5. ¿Qué nota corresponde?

5. Calcula la mediana de estos datos: 9, 15, 19, 22, 31, 38 y 43.

6. Calcula la mediana de estos datos: 22, 19, 38, 31 y 43.

7. En una distribución de 63 datos, la frecuencia absoluta de un valor de la variable es 21. ¿Cuántos grados corresponderían a ese valor en un diagrama de sectores?

8. Para obtener la nota final de curso nos dan a elegir entre la media, la mediana y la moda de las nueve notas obtenidas. ¿Cuál elegirías? Las notas son: 6, 3, 3, 4, 6, 8, 7, 9 y 3.

9. Calcula la mediana de estos datos: 1, 17, 26, 5, 11 y 24.

10. Indica si la variable es discreta, continua o cualitativa: Perímetro craneal.

Soluciones de los ejercicios para practicar

A.1 Cualitativa, continua, cualitativa, cualitativa, cualitativa, discreta.

A.2 Discreta, cualitativa, discreta, continua, continua, discreta.

A.3 Discreta, continua, discreta, cualitativa, discreta, continua.

B.4

Nº de cambios de domicilio	f	h	F	H
0	5	0,17	5	0,17
1	1	0,03	6	0,21
2	4	0,14	10	0,34
3	7	0,24	17	0,59
4	5	0,17	22	0,76
5	1	0,03	23	0,79
	23			

B.5

Nº de hermanos	f	h	F	H
0	2	0,07	2	0,07
1	8	0,28	10	0,34
2	2	0,07	12	0,41
3	5	0,17	17	0,59
4	3	0,1	20	0,69
	20			

B.6

Nº de dormitorios	f	h	F	H
0	5	0,17	5	0,17
1	6	0,21	11	0,38
2	2	0,07	13	0,45
3	9	0,31	22	0,76
4	5	0,17	27	0,93
5	1	0,03	28	0,97
	28			

B.7

Nº de faltas de ortografía	f	h	F	H
0	7	0,23	7	0,23
1	4	0,13	11	0,37
2	3	0,1	14	0,47
3	2	0,07	16	0,53
4	4	0,13	20	0,67
5	6	0,2	26	0,87
6	4	0,13	30	1
	30			

C.8

Actividades tiempo libre	f	h
Deporte	4	0,14
Amigos	4	0,14
Idiomas	4	0,14
Baile	2	0,07
Cine	2	0,07
Música	4	0,14
	20	

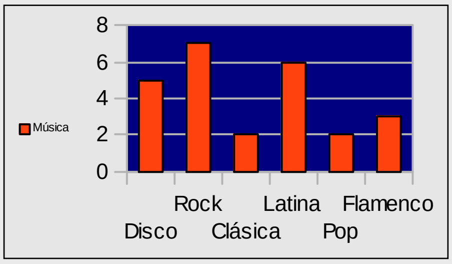
C.9

Sabor preferido	f	h
Naranja	6	0,21
Cola	8	0,28
Limón	3	0,1
Piña	1	0,03
Melocotón	1	0,03
Manzana	3	0,1
	22	

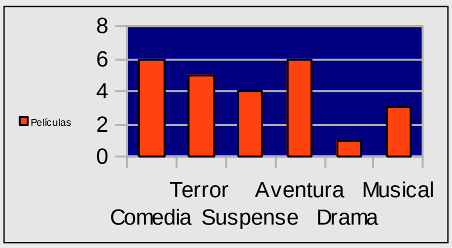
Programa de televisión	f	h
Ficción	5	0,17
Infantiles	3	0,1
Deportivos	4	0,14
Espectáculo	4	0,14
Documentales	2	0,07
Culturales	2	0,07
	20	

C.10

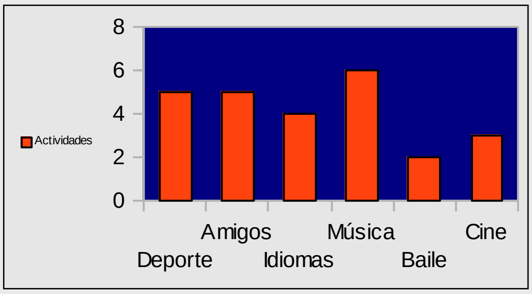
D.11



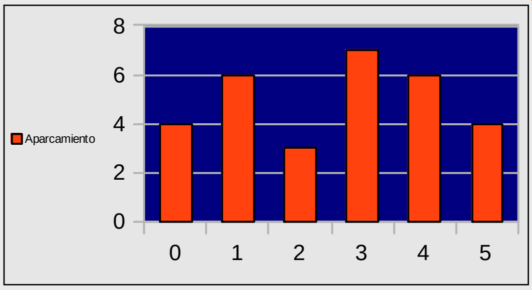
D.12



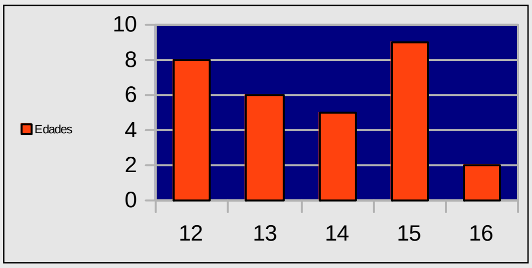
D.13



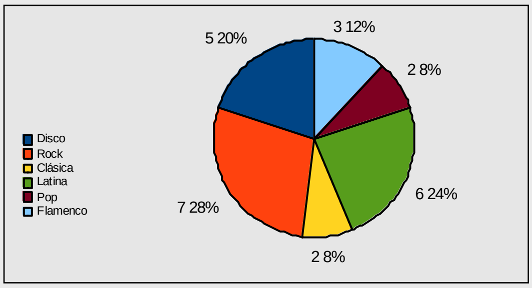
D.17



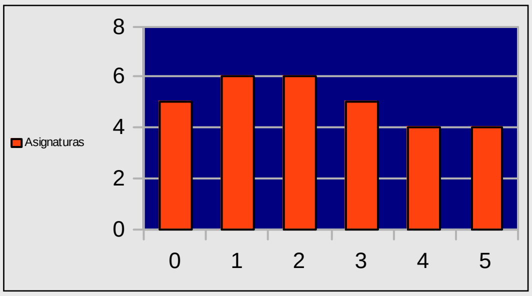
D.14



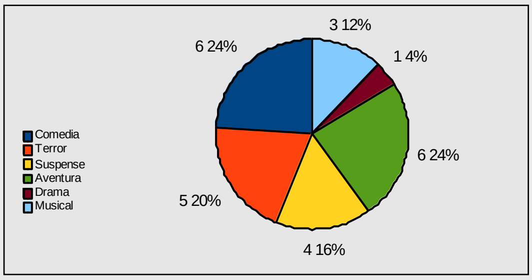
E.11



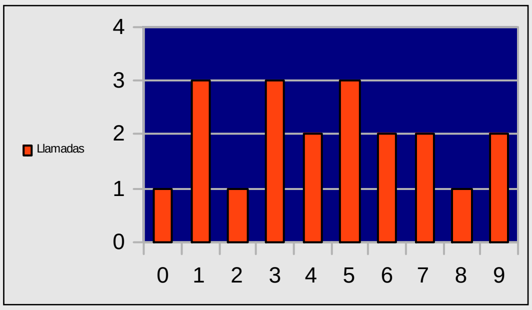
D.15



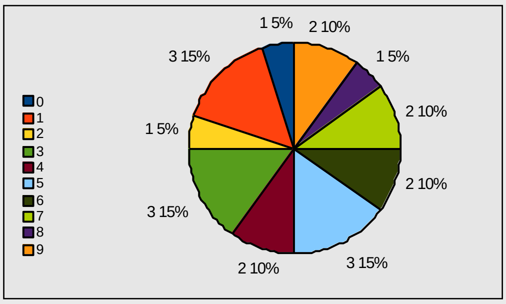
E.12



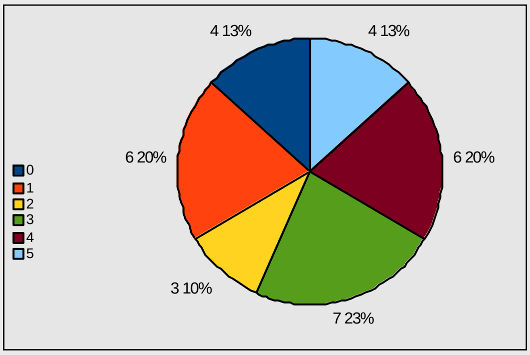
D.16



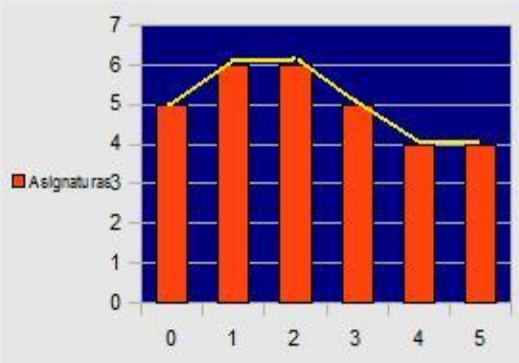
E.16



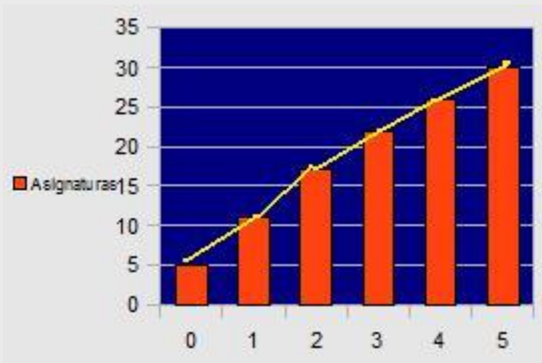
E.17



G.15



G.14



G.6
Media = 2,21
Mediana = 3
Moda = 3

G.7
Media = 2,86
Mediana = 3
Moda = 0

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 6’33
2. 2´3
3. 5’8
4. 8’94
5. 22
6. 38
7. 120º
8. La mediana
9. 14
10. Cualitativa

No olvides enviar las actividades al tutor ▶