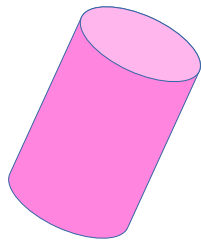
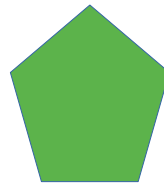


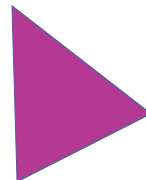
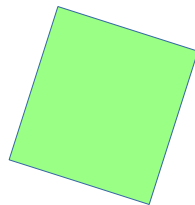
Àrees i volums



$$V = A_b * h$$



$$A = b * h / 2$$



Centre d'Estudis Edukat
Reforç escolar i tècniques d'estudi

INTRODUCCIÓ

- La geometria és la part de les matemàtiques que estudia les propietats i les relacions entre els objectes geomètrics. El punt, la recta, el pla, els polígons i els poliedres, per exemple, són objectes geomètrics.
- En aquesta unitat aprendrem a calcular l'àrea i el volum de polígons, poliedres i cossos de revolució.
- Però abans definirem alguns conceptes bàsics per a poder comprendre bé aquest tema. L'explicació de cada apartat s'il·lustra amb gràfics en dues o tres dimensions.
- Tot i que habitualment pensem que és un tema de primària poc important, entendre bé el càlcul d'àrees i volums és una eina bàsica a matemàtiques, física i a moltes altres disciplines de la ciència.

Xavier Mas,
Centre d'Estudis Edukat, Febrer del 2020



[Attribution-ShareAlike 4.0 International \(CC BY-SA 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)

DEFINICIONS

- Punt: és un element geomètric sense dimensions, tot i que el representem gràficament amb un punt petit.



- Recta: una recta és una alineació infinita de punts. Una recta té una dimensió (longitud).

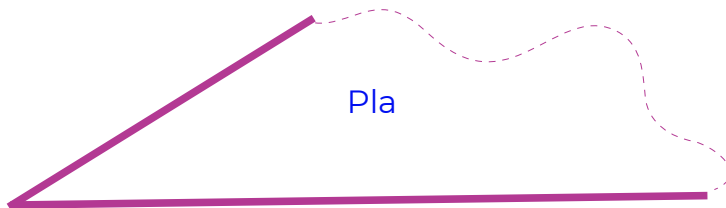


- Segment: és un recta fitada per dos extrems. Si tallem una recta per dos extrems obtindrem un segment.

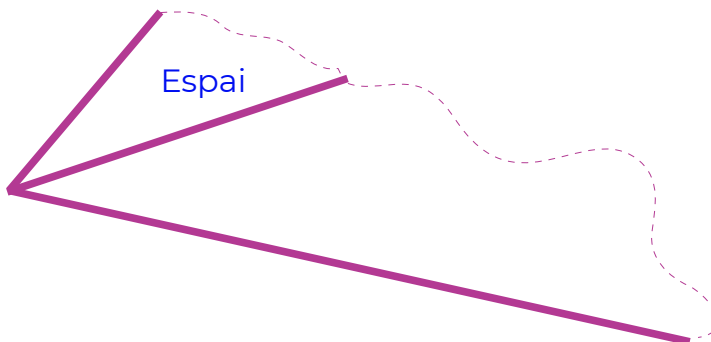
A cada banda d'un segment es forma una semirecta.



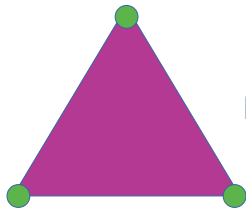
- Pla: una pla és una superfície plana oberta i infinita. Dues rectes que es tallen formen un pla. Un pla té dues dimensions (longitud i amplada).



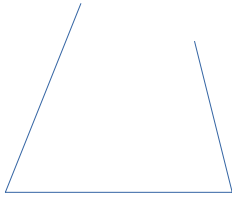
- Espai: un espai és un volum obert infinit. Tres rectes que es tallen formen un espai. Un espai té tres dimensions (longitud, amplada i alçària).



- Polígon: és una figura en el pla delimitada per una línia poligonal tancada (una línia poligonal és una sèrie connectada de segments lineals).

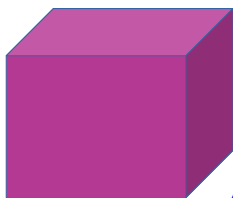


Línia poligonal tancada.



Línia poligonal oberta (això no és un polígon).

- Poliedre: és un cos geomètric tridimensional. Les cares d'un poliedre són polígons. Té amplada, longitud i alçària.



Alçària

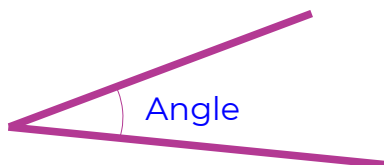
Amplada

Longitud

- Angle: és l'amplitud de l'obertura entre dues rectes.

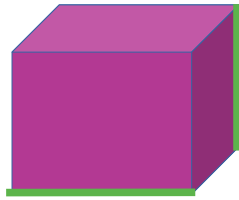
En el sistema internacional (SI) l'angle es mesura en *radians* (rad) i en el sistema sexagesimal en *graus* (°). Un *gradient* és una altra manera de mesurar angles (GRA).

La circumferència mesurada en radians conté 2π radians, mesurada en graus conté 360° i mesurada en gradients conté 400 GRA.



- Aresta: és el segment que es genera de la intersecció de dues cares contigües d'un poliedre.

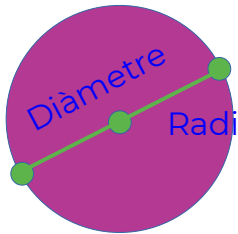
En un poliedre, distingim entre l'aresta lateral i l'aresta bàsica. L'aresta lateral és qualsevol aresta dels polígons laterals del poliedre i l'aresta bàsica és qualsevol aresta de la base del poliedre.



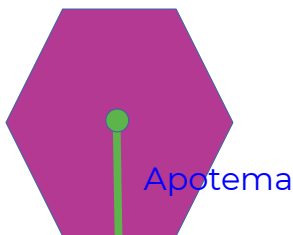
Aresta lateral

Aresta bàsica

- Radi: és la distància entre un punt d'una circumferència i el seu centre. El diàmetre és el segment que, passant pel centre d'una circumferència, n'uneix dos punts oposats.



- Apotema: és el segment que uneix el centre d'un polígon regular i el punt mitjà d'un dels seus costats. És perpendicular al costat.



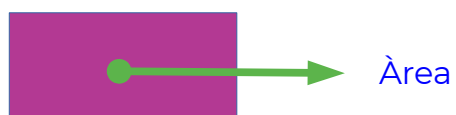
- Polígon circumscribit: és un polígon els costats del qual són tangents a una circumferència. Si el polígon és regular, el radi i l'apotema són de la mateixa longitud.



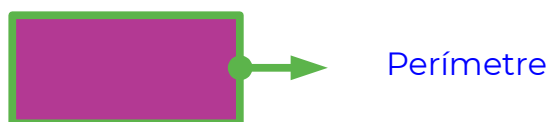
Polígon inscrit: és un polígon els vèrtexs del qual estan situats sobre la circumferència. Si el polígon és regular, els radis de la circumferència i el polígon coincideixen.



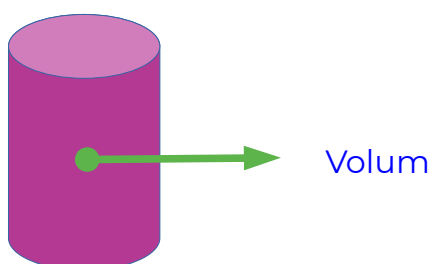
- Àrea o superfície: és l'extensió del pla que ocupa un objecte.



- Perímetre: és la longitud total del costats d'un polígon. En la figura de sota, el perímetre és la suma de la longitud de tots els costats.



- Volum: és l'extensió de l'espai que ocupa un objecte.



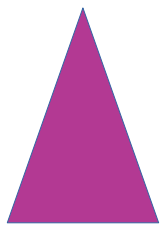
CÀLCUL DE LES ÀREES DELS POLÍGONS

- A continuació, veurem com calcular l'àrea i el perímetre dels polígons. Per a poder tancar una línia poligonal cal que el polígon tingui com a mínim tres costats (la circumferència n'és una excepció). Per tant, els polígons més senzills són els triangles.
- TRIANGLES:

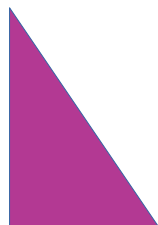
Classifiquem els triangles segons els seus angles en: ACUTANGLES, OBTUSANGLES I RECTANGLES.

Recordeu que un angle acutangle és menor de 90° , un de rectangle fa exactament 90° i un d'obtúsangle fa més de 90° . Un angle pla fa exactament 180° .

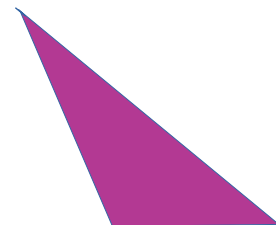
Un triangle acutangle té tots els seus angles aguts. Un de rectangle té un angle de 90° . I un triangle obtúsangle té un angle de més de 90° :



Acutangle

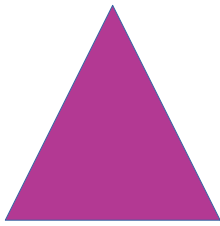


Rectangle

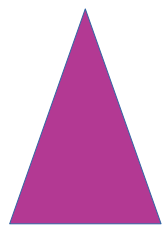


Obtusangle

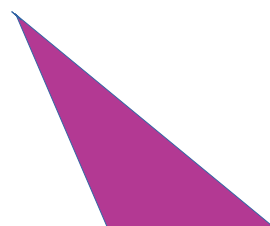
Classifiquem els triangle segons els seus costats com :



Equilàter



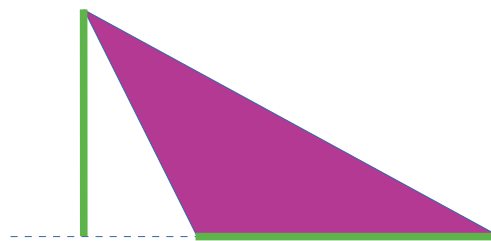
Isòsceles



Escalè

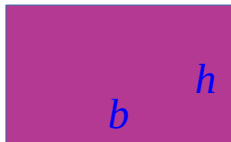
La fórmula per a calcular l'àrea de qualsevol triangle és: $A = \frac{b * h}{2}$

Alçària del triangle



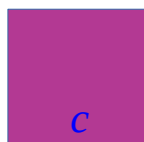
Base del triangle

- QUADRILÀTERS: són polígons de quatre costats.



Rectangle

$$A = b * h$$



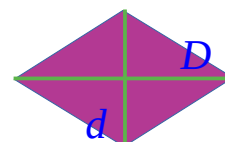
Quadrat

$$A = c^2$$



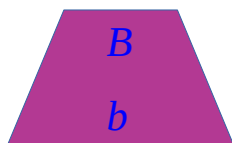
Paral·lelogram

$$A = b * h$$



Rombe

$$A = \frac{D * d}{2}$$



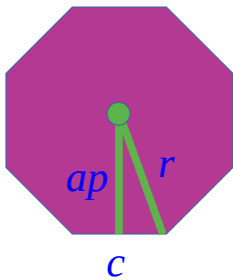
Trapezi

$$A = \frac{B * b}{2}$$

- Polígons regulars: són els polígons que tenen tots els costats i tots els angles iguals.

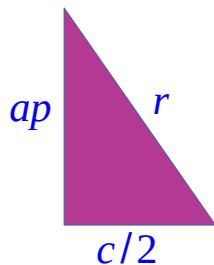
La fórmula per a calcular-ne l'àrea és: $\frac{\text{Perímetre} * \text{Apotema}}{2}$

De fet, tot i que diem polígons regulars als polígons de més de quatre costats, un quadrat o un triangle equilàter també són polígons regulars i podem calcular-ne l'àrea fent servir la fórmula anterior.



Si n és el nombre de costats del polígon, $A = \frac{n * c * ap}{2}$.

Si cal, per a calcular l'apotema, podem fer servir el teorema de Pitàgores:



$$ap = \sqrt{r^2 - (c/2)^2}$$

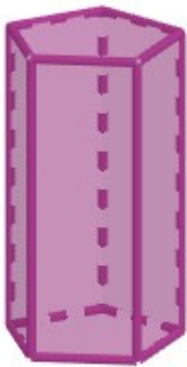
CÀLCUL D'ÀREES I VOLUMS DE POLIEDRES

- Un poliedre està format per la unió de diverses cares poligonals.

Els poliedres poden ser regulars o irregulars.

Entre els poliedres irregulars hi ha el prismes i les piràmides.

- PRISMES: Un prisma és un poliedre amb dues bases poligonals (té un polígon en cada base). Les cares laterals són paral·lelograms (quadrilàters amb els costats oposats paral·lels):



$$A_{prisma} = \text{Perímetre base} * \text{alçària} = n * c * h$$

- Per a calcular l'àrea lateral d'un prisma, fem:

$$A_{base} = \frac{2 * n * c * ap}{2} = n * c * ap$$

L'àrea de la base es calcula mitjançant les fórmules per a calcular l'àrea d'un polígon. En aquest cas, el polígon de la base és un pentàgon, així que:

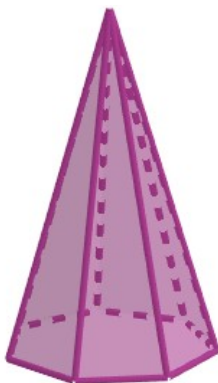
Si el costat c del prisma és 8 cm, l'apotema fa 3 cm i l'alçària del prisma són 10 cm, l'àrea del prisma serà:

$$A_{prisma} = n * c * h + n * c * ap = 5 * 8 * 10 + 5 * 8 * 3 = 520 \text{ cm}^2$$

- Per a calcular el volum del prisma:

$$V_{prisma} = \text{Àrea base} * \text{alçària} = n * c * ap * h = 5 * 8 * 3 * 10 = 1200 \text{ cm}^3$$

- PIRÀMIDES: una piràmide és un poliedre que té un base poligonal i cares triangulars. Les cares convergeixen en un vèrtex.

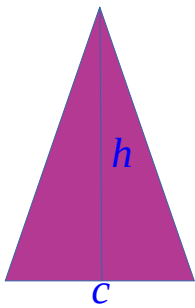


- Per a calcular l'àrea de la base d'una piràmide, fem:

$$A_{base} = \frac{n * c * ap}{2}$$

- I per a calcular l'àrea lateral:

$$A_{lateral} = n * \text{àrea}_{triangle}$$



$$A_{triangle} = \frac{Base * alçària}{2} = \frac{c * h}{2}$$

- Per a calcular l'àrea lateral de la piràmide, fem:

$$A_{lateral} = \frac{Base * alçària * n}{2} = \frac{c * h * n}{2}$$

l'àrea de la piràmide és:

$$A_{piràmide} = A_{base} + A_{lateral} = \frac{n * c * ap}{2} + \frac{c * h * n}{2}$$

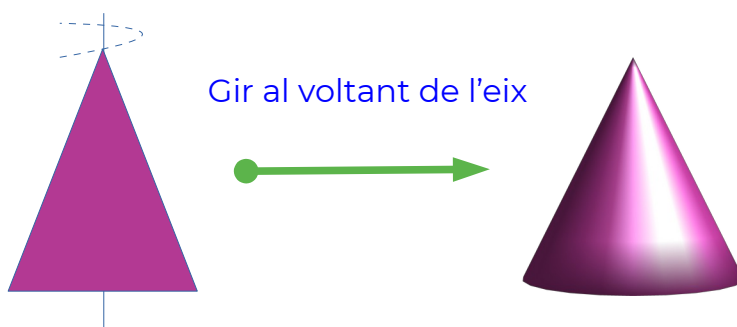
El volum d'una piràmide és un terç de l'àrea del volum del prisma d'igual base i alçària:

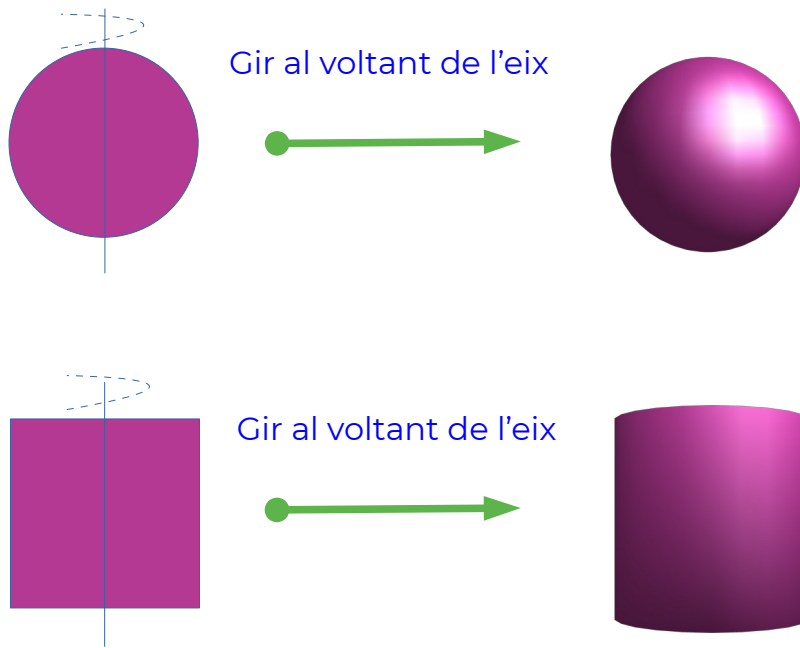
$$V_{piràmide} = \frac{A_{base} * h}{3}$$

COSSOS DE REVOLUCIÓ

- COSSOS DE REVOLUCIÓ: és el cos rodó que genera una figura plana. La figura plana és la generatriu del cos de revolució.

Els cossos de revolució més importants són: el con, l'esfera i el cilindre.

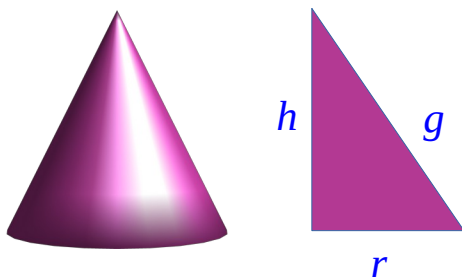




- Per a calcular l'àrea i el volum del con, farem:

$$A_{con} = A_{base} + A_{lateral} = \pi * radi^2 + \pi * generatriu^2 = \pi * r^2 + \pi * g^2 = \pi * (r^2 + g^2)$$

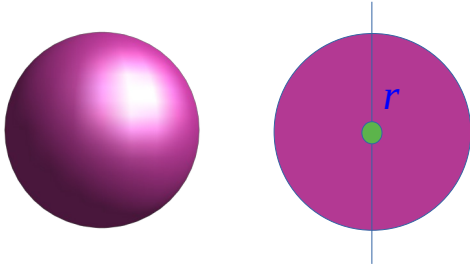
$$V_{con} = \frac{A_{base} * h}{3} = \frac{\pi * r^2 * h}{3}$$



- L'àrea i volum de l'esfera és:

$$A_{\text{esfera}} = 4\pi * r^2$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} * \pi * r^3$$



- Calcularem l'àrea i el volum del cilindre de la següent manera:

$$A_{\text{cilindre}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = \pi * \text{radi}^2 + \text{perímetre} * \text{alçària} =$$

$$\pi * r^2 + 2\pi * r * h =$$

$$V_{\text{con}} = \pi * r^2 * h$$

